

Restriction de la représentation de Weil à un sous-groupe compact maximal ou à un tore maximal elliptique.

Khemais Maktouf

Université de Monastir, Faculté des Sciences de Monastir, Département de Mathématiques, 5019 Monastir, Tunisie

Pierre Torasso

UMR 6086 CNRS, Université de Poitiers, Laboratoire de Mathématiques et Applications, Boulevard Marie et Pierre Curie, BP 30179, 86962 Chasseneuil Cedex, France

Résumé: Dans cet article nous démontrons que la représentation de Weil sur un corps p -adique avec $p \neq 2$ restreinte à un sous-groupe compact maximal ou un tore maximal elliptique du groupe métaplectique se décompose sans multiplicité et décrivons explicitement les représentations irréductibles ou les caractères qui interviennent.

Mots clés: représentation de Weil, groupe métaplectique, sous-groupe compact maximal, tore maximal elliptique

1991 MSC: 22E50

Abstract: In this article, we prove that the restriction of the Weil representation over a p -adic field, $p \neq 2$, to maximal compact subgroups or elliptic maximal tori of the metaplectic group is multiplicity free and give an explicit description of the irreducible representations or characters occurring.

Key words: Weil representation, metaplectic group, maximal compact subgroup, elliptic maximal torus

1991 MSC: 22E50

1 Introduction

La représentation de Weil intervient dans de nombreux domaines de la théorie des représentations des groupes presque algébriques généraux ou des groupes réductifs sur

Email addresses: khemais.maktouf@fsm.rnu.tn (Khemais Maktouf), pierre.torasso@math.univ-poitiers.fr (Pierre Torasso).

un corps local. Citons la construction, dans le cadre de la méthode des orbites, des représentations unitaires irréductibles dans [5], la correspondance de Howe (voir [16], [11, Chapitre 2], [20]), les séries theta [10]. Il est donc important d'en comprendre la structure et notamment comment sa restriction à un sous-groupe compact maximal ou un tore anisotrope se décompose en irréductibles. Dans cet article, nous nous plaçons sur un corps p -adique de caractéristique résiduelle différente de 2 et nous démontrons que les représentations des sous-groupes compacts maximaux et les caractères des tores maximaux elliptiques qui apparaissent effectivement le font avec la multiplicité 1 et les décrivons explicitement.

Soit k un corps local non archimédien de caractéristique nulle, \mathcal{O} l'anneau des entiers de k , \mathfrak{p} son idéal maximal et ϖ une uniformisante de \mathcal{O} . Le corps résiduel \mathcal{O}/\mathfrak{p} (noté \mathbb{F}_q) est fini de cardinal q et de caractéristique p . Nous supposons que $p \neq 2$. Nous fixons un caractère unitaire ψ de conducteur λ_ψ de k .

On se donne un k -espace symplectique (W, β) de dimension $2r$. On note $Sp(W)$ le groupe symplectique associé à (W, β) et $Mp(W)$ le groupe métaplectique correspondant, revêtement à deux feuillets non trivial de $Sp(W)$. On a une suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow Mp(W) \longrightarrow Sp(W) \longrightarrow 1. \quad (1.1)$$

En fait, le groupe de Heisenberg $H(W)$ construit sur l'espace symplectique W admet une unique (à équivalence près) représentation unitaire irréductible (ρ_ψ, \mathcal{H}) de caractère central ψ ; on l'appelle la représentation de Schrödinger de caractère central ψ de $H(W)$. Le groupe $Sp(W)$ opère dans $H(W)$ par automorphismes agissant trivialement sur le centre. Soit $U(\mathcal{H})$ le groupe des transformations unitaires de l'espace de Hilbert \mathcal{H} , muni de la topologie de la convergence forte. L'ensemble $\widehat{Sp(W)}_\psi$ des couples $(g, U) \in Sp(W) \times U(\mathcal{H})$ vérifiant :

$$U\rho_\psi(h)U^{-1} = \rho_\psi(g.h), \quad g \in Sp(W), \quad h \in H(W),$$

est un sous-groupe fermé localement compact de $Sp(W) \times U(\mathcal{H})$, extension centrale de $Sp(W)$ par le groupe \mathbb{U} des nombres complexes de module 1. On a donc une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \mathbb{U} \longrightarrow \widehat{Sp(W)}_\psi \longrightarrow Sp(W) \longrightarrow 1 \quad (1.2)$$

et l'application $S_\psi : (g, U) \mapsto U$ est une représentation de $\widehat{Sp(W)}_\psi$, appelée représentation métaplectique. Il existe un unique homomorphisme de groupes $Mp(W) \longrightarrow \widehat{Sp(W)}_\psi$ rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} Mp(W) & \xrightarrow{\quad} & \widehat{Sp(W)}_\psi \\ & \searrow & \swarrow \\ & Sp(W) & \end{array}$$

Ce morphisme est injectif et permet d'identifier $Mp(W)$ à un sous-groupe de $\widehat{Sp(W)}_\psi$. Alors la restriction à $Mp(W)$ de la représentation métaplectique est une représentation fidèle encore notée S_ψ et appelée représentation de Weil de type ψ de $Mp(W)$.

Nous montrons que la suite exacte 1.1 est scindée au dessus de chaque sous-groupe compact maximal de $Sp(W)$. On sait qu'un sous-groupe compact maximal de $Sp(W)$ est le stabilisateur K_B d'un bon réseau B de W , i. e. B est un sous- \mathcal{O} -module ouvert et compact de W vérifiant

$$\varpi B^* \subset B \subset B^*,$$

où B^* est le réseau dual de B relativement à β et ψ . Dans [20, II.3], Waldspurger a associé à un tel réseau une réalisation $(\rho_\psi^B, \mathcal{H}_\psi^B)$ de la représentation de Schrödinger, appelée modèle latticiel généralisé, et une représentation S_ψ^B de K_B dans \mathcal{H}_ψ^B telle que l'application $g \mapsto (g, S_\psi^B(g))$ soit une section de la suite exacte courte 1.2. Lorsque B est un réseau autodual, on parle de modèle latticiel : dans ce cas, Mœglin a montré que cette application est une section canonique, et unique lorsque $q \geq 4$, de la suite exacte 1.1 (voir [11, Chapitre 2, II 10, Lemme]). Nous montrons que ce résultat reste vrai dans le cas général (voir les théorèmes 4.2.1 et 4.6.1). Pour ce faire, nous comparons le modèle latticiel généralisé associé au bon réseau B avec le modèle latticiel associé à un réseau autodual A tel que $B \subset A \subset B^*$ (voir le théorème 4.5.1). Nous obtenons en particulier les formules explicites pour la réalisation, dans ce modèle latticiel, de la représentation S_ψ^B de Waldspurger pour les éléments d'un système de générateurs du groupe K_B constitué du sous-groupe «parabolique» P_B stabilisateur de A et d'un élément particulier $\varsigma_B \in K_B \setminus P_B$ (voir le corollaire 4.5.1). Il est à remarquer que l'énoncé du théorème 4.5.1 se trouve déjà dans [14, 4.3.e].

Dans la suite de cette introduction, nous noterons S_ψ^B la réalisation de la représentation de Weil dans le modèle latticiel associé au bon réseau B . On voit donc que la représentation S_ψ^B de Waldspurger est la restriction de la représentation de Weil S_ψ^B à l'image de K_B par sa section canonique dans le groupe métaplectique. De même, les formules que nous avons obtenues pour la réalisation de la représentation de Waldspurger de K_B dans le modèle latticiel décrivent la restriction à cette section de la représentation de Weil S_ψ^A .

Ces dernières formules, nous permettent d'étudier la décomposition en irréductibles de la restriction de la représentation de Weil à P_B et à K_B . Dans les deux cas, nous montrons que cette décomposition est sans multiplicité ; nous montrons également que les représentations de P_B qui apparaissent sont monomiales et en donnons une description explicite (voir le lemme 5.1.2 et le théorème 5.2.1). Lorsque le réseau B est autodual, les représentations de K_B qui apparaissent sont également monomiales ; dans ce cas le résultat a été obtenu par Prasad (voir [16]).

Si n est un entier naturel, on désigne par O_n l'anneau $\mathcal{O}/\varpi^{n+1}\mathcal{O}$ et on pose $\mathfrak{b}_n = B/\varpi^{n+1}B^*$ et $\mathfrak{b}_n^* = B^*/\varpi^n B$. Alors, O_n est un anneau local fini et principal de caractéristique différente de 2, \mathfrak{b}_n (resp. \mathfrak{b}_n^*) est un O_n -module de type fini muni naturellement d'une structure symplectique et l'action de K_B dans B passe au quotient à \mathfrak{b}_n (resp.

\mathfrak{b}_n^*), induisant un morphisme surjectif de K_B sur le groupe symplectique $Sp(\mathfrak{b}_n)$ (resp. $Sp(\mathfrak{b}_n^*)$). On remarque que $O_0 = \mathbb{F}_q$ et que \mathfrak{b}_0 (resp. \mathfrak{b}_0^*), que nous notons plus simplement \mathfrak{b} (resp. \mathfrak{b}^*) est un espace symplectique sur \mathbb{F}_q ; on note $2l$ la dimension de \mathfrak{b}^* . Alors le nombre $l = l(B)$, qui prend toutes les valeurs entières entre 0 et $\frac{1}{2} \dim W$, détermine la classe de conjugaison du bon réseau B et donc celle du sous-groupe compact maximal K_B . On montre que K_B est naturellement isomorphe à la limite projective des groupes $Sp(\mathfrak{b}_n)$ (resp. $Sp(\mathfrak{b}_n^*)$) (voir le lemme 2.5.2).

Dans [3] et [4], Cliff, McNeilly et Szechtman ont construit les représentations de Weil pour le groupe symplectique d'un module symplectique sur un anneau local fini de caractéristique différente de 2 et décrit leur décomposition en irréductibles dans le cas où l'anneau est principal et le module symplectique libre (les différentes représentations de Weil associées à un même caractère primitif de l'anneau local diffèrent d'un caractère du groupe symplectique). Il s'avère que pour $n \geq 1$, le O_n -module \mathfrak{b}_n (resp. \mathfrak{b}_n^*) est libre si et seulement si le réseau B est autodual ($l(B) = 0$) ou vérifie $B = \varpi B^*$ ($l(B) = r$). Nous étendons les résultats de [4] au cas des groupes $Sp(\mathfrak{b}_n)$ (resp. $Sp(\mathfrak{b}_n^*)$) avec B quelconque (voir le théorème 3.5.1). En fait la restriction de la représentation de Weil S_ψ^B à K_B est la limite inductive de représentations de Weil des groupes $Sp(\mathfrak{b}_{2n+1})$. Utilisant alors nos résultats, nous en déduisons une description des représentations irréductibles apparaissant dans la décomposition de la restriction de la représentation de Weil à K_B comme représentations induites à partir de stabilisateurs génériques de K_B dans les différents \mathfrak{b}_{2n+1} (voir le théorème 5.3.1 et le lemme 5.4.1). Dans [4] Cliff, McNeilly et Szechtman ont remarqué que leurs résultats permettaient d'obtenir la décomposition en irréductible de la restriction de la représentation de Weil à K_B lorsque B est autodual ou vérifie $B = \varpi B^*$.

D'autre part, dans [6] Dutta et Prasad ont démontré que la représentation de Weil du groupe symplectique construit sur un groupe abélien fini se décompose sans multiplicité. Ils ont décrit cette décomposition en terme de la combinatoire des orbites du groupe abélien sous l'action de son groupe d'automorphismes et remarqué que l'on peut en déduire les mêmes résultats pour la représentation du groupe symplectique d'un module symplectique de type fini sur un anneau fini local et principal. Leurs résultats contiennent ceux du théorème 3.5.1, sauf que leur description des sous-modules irréductibles ne les fait pas explicitement apparaître comme modules induits.

Un tore T d'un groupe réductif est dit elliptique s'il ne contient pas de sous-tore déployé non central. Un tore elliptique de $Sp(W)$ est donc anisotrope et compact. Par suite, le revêtement métaplectique est scindé au dessus d'un tel tore. Nous étudions la restriction de la représentation de Weil à un tore maximal elliptique de $Sp(W)$, identifié à un sous-groupe de $Mp(W)$ par le choix d'une section.

Tout d'abord, nous démontrons, comme conséquence de la conjecture de Howe, prouvée par Waldspurger dans [20], que la restriction de la représentation de Weil à un tel tore est sans multiplicité (théorème 6.1.1). Cette démonstration, plus simple que celle que nous avons proposée, nous a été communiquée par le *referee*. Nous l'en remercions vivement.

Cependant, ce résultat ne permet pas de décrire complètement cette restriction. Pour ce faire, nous avons besoin de connaître la structure des tores maximaux elliptiques de $Sp(W)$.

Soit T un tore maximal de $Sp(W)$. Comme T -module, W se décompose de manière unique en somme directe de sous-modules irréductibles sur k , $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$. D'après [13], T est elliptique si et seulement si cette décomposition est une somme directe orthogonale de sous-espaces symplectiques. Dans ce cas, $T = T_1 \times \dots \times T_n$ où chaque T_i , image de T par l'application $x \mapsto x|_{W_i}$, est un tore maximal elliptique de $Sp(W_i)$ tel que W_i soit un T_i -module irréductible sur k . Utilisant ce fait, on montre que l'étude de la restriction de la représentation de Weil aux tores elliptiques maximaux de $Sp(W)$ se ramène au même problème pour ceux de ses tores maximaux dont l'action dans W est irréductible sur k (voir la proposition 6.2.1 et le théorème 6.8.1). Pour simplifier, nous dirons qu'un tore T de $Sp(W)$ tel que le T -module soit irréductible sur k est irréductible.

Soit donc T un tore maximal irréductible de $Sp(W)$. D'après [13], il existe une extension k' de degré r de k , une extension quadratique k'' de k' , un élément $u \in k''^\times$ de trace nulle relativement à k' et un isomorphisme θ d'espaces symplectiques de (k'', β_u) sur W tels que T soit l'image de $T_{k'',k'}$ par l'isomorphisme $\tilde{\theta} : t \mapsto \theta \circ t \circ \theta^{-1}$, où la forme β_u est définie par

$$\beta_u(x, y) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}_{k''/k} u x^\tau y, \quad x, y \in k'',$$

τ désignant l'élément non trivial du groupe de Galois de k'' sur k' , et $T_{k'',k'}$ est le sous-groupe multiplicatif de k''^\times constitué des éléments de norme 1 relativement à k' . On note \mathcal{O}' (resp. \mathcal{O}'') l'anneau des entiers, ϖ' (resp. ϖ'') une uniformisante, v' (resp. v'') la valuation normalisée et q' (resp. q'') le cardinal du corps résiduel de k' (resp. k''). On prend ϖ'' tel que $\varpi''^2 = \varpi'$ lorsque k'' est ramifié sur k' , et $\varpi'' = \varpi'$ dans le cas contraire. On montre que l'on peut prendre $u = \varpi''$ lorsque k'' est ramifié sur k' et $v''(u) \in \{0, 1\}$ dans le cas contraire (voir le théorème 6.3.1).

Si $j \in \mathbb{N}$, on désigne par T_j le j -ième sous-groupe de congruence de T :

$$T_j = \{g \in T \mid g - 1 \in \varpi''^j \mathcal{O}''\}.$$

On a $T_0 = T$ et, pour $j \geq 1$, T_j est un sous-groupe strict de T . Lorsque k'' n'est pas ramifié sur k' , la suite T_j est strictement décroissante. Dans le cas contraire, la suite T_{2j+1} est strictement décroissante et on a $T_{2j} = T_{2j+1}$ pour $j > 0$.

Soit $j \in \mathbb{N}$ et χ un caractère de T_j . On appelle conducteur de χ , le plus petit entier λ tel que T_λ soit contenu dans le noyau de χ .

Lorsque k'' n'est pas ramifié sur k' , le groupe quotient T/T_1 est canoniquement isomorphe au groupe $\mu_{q'+1}$ des racines $(q' + 1)$ -ièmes de l'unité dans k'' . L'ensemble des caractères de conducteur au plus 1 de T est donc égal à l'ensemble des caractères de $\mu_{q'+1}$. Soit $(,)_{k'}$ le symbole de Hilbert du corps k' . D'après le théorème 90 de Hilbert,

tout élément g de T s'écrit $g = z(z^{-1})^\tau$ avec $z \in \mathcal{O}''^\times$. La formule

$$\eta_0(g) = (\varpi', zz^\tau)_{k'} = \left(\frac{p_{\mathbb{F}_{q'}}(zz^\tau)}{q'} \right) \quad (1.3)$$

définit un caractère de conducteur 1 de T (ici, $\left(\frac{\cdot}{q'}\right)$ désigne le symbole de Legendre relatif au corps $\mathbb{F}_{q'}$).

Lorsque k'' est ramifié sur k' , le groupe quotient T/T_1 est le groupe à deux éléments. Par suite, tous les caractères de T sont de conducteur pair à l'exception du caractère non trivial de T/T_1 qui est de conducteur 1. Soit χ un caractère de T de conducteur $2\lambda \geq 2$ et j un entier tel que $j < \lambda \leq 3j + 1$; alors, il existe $b \in \mathcal{O}''^\times$, uniquement déterminé modulo le sous-groupe multiplicatif $1 + \varpi'^{\lambda-j}\mathcal{O}'$, tel que la restriction de χ au sous-groupe de congruence T_{2j+1} soit égal au caractère $\chi_{b,\lambda,j}$ défini par la formule 6.6 du lemme 6.5.2.

On note e l'indice de ramification de k' sur k et δ l'entier tel que l'idéal $\varpi'^\delta \mathcal{O}'$ soit la différente de k' sur k . On pose $\mu = e\lambda_\psi - \delta - v''(u)$.

On définit le réseau B en posant

$$B = \begin{cases} \varpi''^\mu \mathcal{O}'' & \text{si } k'' \text{ est ramifié sur } k', \\ \varpi'^{\lfloor \frac{\mu+1}{2} \rfloor} \mathcal{O}'' & \text{si } k'' \text{ est non ramifié sur } k'. \end{cases}$$

Alors B est un bon réseau T -invariant, autodual si et seulement si k'' est ramifié sur k' ou si μ est pair. Lorsque k'' est non ramifié sur k' et μ est impair, $B^* = \varpi'^{-1}B$ et $b^* = \mathcal{O}''/\varpi' \mathcal{O}''$ est un \mathbb{F}_q espace vectoriel symplectique de dimension $\frac{2r}{e}$ (voir le corollaire 6.4.1). La donnée du réseau B détermine une section du revêtement métaplectique au dessus de T , restriction de la section canonique au dessus du sous-groupe compact maximal K_B .

Supposons que le réseau B est autodual. Alors, nous montrons que le caractère trivial intervient dans la représentation de Weil et qu'un caractère χ non trivial de T intervient si et seulement si

- χ est de conducteur pair, lorsque k'' est non ramifié sur k' ,
- χ est de conducteur pair $2j > 0$ et il existe $a \in \mathcal{O}''^\times$ tel que $\chi|_{T_j} = \chi_{aa^\tau, j, [\frac{j}{2}]}$, lorsque k'' est ramifié sur k' .

Supposons que le réseau B n'est pas autodual, de sorte que k'' est non ramifié sur k' . Nous montrons qu'un caractère χ de T intervient si et seulement si l'une des deux assertions suivantes est vérifiée

- χ est de conducteur au plus 1 et $\chi \neq \eta_0$,
- χ est de conducteur impair, strictement supérieur à 1.

A propos de la première assertion, il est à noter que la représentation de Weil du groupe symplectique $Sp(b^*)$ apparaît comme sous-représentation de K_B dans la représentation de Weil de $Sp(W)$ et que les caractères de T de conducteur au plus 1 interviennent dans le sous- K_B -module correspondant. Or la représentation de Weil de $Sp(b^*)$ est de

dimension q' , tandis que les caractères de T de conducteur au plus 1 sont au nombre de $q' + 1$.

Dans tous les cas, nous décrivons une base de l'espace des vecteurs propres de poids χ . Ces derniers résultats sont énoncés dans les théorèmes 6.6.1 et 6.7.1 et généralisent ceux démontrés par Yang dans le cas où W est de dimension 2 (voir [23]).

Nous remercions Paul Broussous, François Courtès et Claude Quitté pour d'utiles conversations.

2 Sous-groupes compacts maximaux du groupe symplectique

2.1 Dans la suite, k désigne un corps local non archimédien de caractéristique nulle, \mathcal{O} l'anneau des entiers de k et \mathfrak{p} son idéal maximal. Nous fixons ϖ une uniformisante de \mathcal{O} , c'est-à-dire $\varpi \in \mathcal{O}$ tel que $\mathfrak{p} = \varpi\mathcal{O}$. Le corps résiduel \mathcal{O}/\mathfrak{p} est fini de cardinal q et de caractéristique p , nous le notons \mathbb{F}_q . L'entier p est appelé la caractéristique résiduelle de k . Nous supposons que $p \neq 2$.

Nous fixons aussi un caractère unitaire ψ non trivial de k . Son conducteur λ_ψ est l'unique entier relatif vérifiant

$$\psi|_{\mathfrak{p}^{\lambda_\psi}} \equiv 1 \text{ et } \psi|_{\mathfrak{p}^{\lambda_\psi-1}} \not\equiv 1.$$

Le caractère ψ induit un caractère $\overline{\psi}$ de \mathbb{F}_q tel que

$$\overline{\psi}(p_{\mathbb{F}_q}(x)) = \psi(\varpi^{\lambda_\psi-1}x), x \in \mathcal{O},$$

$p_{\mathbb{F}_q}$ désignant la projection naturelle de \mathcal{O} sur \mathbb{F}_q .

2.2 Dans la suite, F désigne soit un anneau local fini de caractéristique différente de 2, muni de la topologie discrète, soit un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle différente de 2, muni de sa topologie localement compacte. On appelle F -espace symplectique tout couple (W, β) où W est un F -module de type fini et β une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur W .

Tout F -module de type fini est naturellement muni d'une topologie localement compacte : lorsque F est un anneau local fini, il s'agit de la topologie discrète et, lorsque F est un corps local, il s'agit de sa topologie d'espace vectoriel de dimension finie sur ce corps local. On munit alors $GL(W)$, le groupe linéaire de W , de la topologie induite par celle de $End_F(W)$, qui en fait un groupe topologique localement compact.

On désigne par J_r la matrice antisymétrique d'ordre $2r$:

$$J_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix},$$

I_r étant la matrice identité d'ordre r .

Si W est un F -module libre, on appelle base symplectique (resp. presque symplectique) de W , toute base $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r)$ telle que la matrice de β dans cette base soit J_r (resp. tJ_r , où $t \in F$ est non nul). Dans ce cas, de telles bases existent (voir [9]).

On note $Sp(W, \beta)$ ou plus simplement $Sp(W)$ le groupe symplectique associé à (W, β) :

$$Sp(W) = \{g \in GL(W) / \beta(gv, gw) = \beta(v, w), \text{ pour tout } v, w \in W\}.$$

C'est un sous-groupe fermé de $GL(W)$. Il contient, lorsque W est non nul, le groupe à deux éléments $\{\pm Id\}$ comme sous-groupe central ; lorsque F est un corps, ce sous-groupe est le centre de $Sp(W)$. Lorsque W est nul, $Sp(W)$ est le groupe trivial.

Soit $g \in GL(W)$ dont la matrice dans une base presque symplectique s'écrit par blocs $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors, on a : $g \in Sp(W)$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

$$\begin{aligned} {}^t a c &= {}^t c a, \quad {}^t b d = {}^t d b & \text{et} & \quad {}^t a d - {}^t c b = I_r, \\ a {}^t b &= b {}^t a, \quad c {}^t d = d {}^t c & \text{et} & \quad a {}^t d - b {}^t c = I_r. \end{aligned}$$

Si U est une partie de W , on note U^\perp son orthogonal relativement à β . Un sous-module U de W est dit totalement isotrope, si $U \subset U^\perp$. Si $U = U^\perp$, on dit que c'est un sous-espace lagrangien ou un lagrangien de W .

Lorsque F est un corps, un sous-espace vectoriel totalement isotrope est de dimension maximale si et seulement si c'est un lagrangien de W . Dans cette situation, le groupe symplectique $Sp(W)$ opère transitivement sur les lagrangiens de (W, β) .

2.3 Soit (W, β) un k -espace symplectique.

Définition 2.3.1 Une base $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r)$ de W est dite autoduale relativement à β et ψ si elle vérifie les relations :

$$\beta(e_i, e_j) = \beta(f_i, f_j) = 0 \text{ et } \beta(e_i, f_j) = \varpi^{\lambda_\psi} \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq r \quad (2.1)$$

ou, de manière équivalente, si la matrice de β dans cette base est $\varpi^{\lambda_\psi} J_r$.

Un réseau B de W est un \mathcal{O} -module, compact et ouvert. On note

$$\begin{aligned} B^* &= \{v \in W, \quad \beta(v, b) \in \varpi^{\lambda_\psi} \mathcal{O}, \text{ pour tout } b \in B\} \\ &= \{v \in W, \quad \psi(\beta(v, b)) = 1, \text{ pour tout } b \in B\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Alors, B^* est aussi un réseau de W ; on l'appelle le réseau dual de B relativement à β et ψ .

Définition 2.3.2 *On dit que B est un bon réseau si*

$$\varpi B^* \subset B \subset B^*.$$

Il est dit autodual si $B = B^$.*

Soit $B \subset W$ un bon réseau. On note \mathfrak{b}^* le quotient B^*/B . Il est naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{F}_q et de la forme symplectique $\beta_{\mathfrak{b}^*}$ définie par :

$$\beta_{\mathfrak{b}^*}(p_{\mathfrak{b}^*}(w), p_{\mathfrak{b}^*}(w')) = p_{\mathbb{F}_q}(\varpi^{1-\lambda_\psi} \beta(w, w')), \quad (2.3)$$

où $p_{\mathfrak{b}^*}$ désigne la projection naturelle de B^* sur \mathfrak{b}^* . On pose $l(B) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{F}_q} \mathfrak{b}^*$. Alors $l(B)$ est un entier et deux bons réseaux B et B' sont conjugués sous l'action de $Sp(W)$ si et seulement si on a $l(B) = l(B')$.

Si B est un bon réseau, on désigne par K_B son stabilisateur dans $Sp(W)$. Alors, les K_B , pour B un bon réseau, forment l'ensemble des sous-groupes compacts maximaux de $Sp(W)$ et deux tels sous-groupes K_B et $K_{B'}$ sont conjugués dans $Sp(W)$ si et seulement si B et B' sont dans la même $Sp(W)$ -orbite, autrement dit si et seulement si $l(B) = l(B')$.

Soit $B \subset W$ un bon réseau et $l = l(B)$. Alors, il existe une base autoduale $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r)$ de W telle que

$$B = \varpi \mathcal{O}e_1 \oplus \dots \oplus \varpi \mathcal{O}e_l \oplus \mathcal{O}e_{l+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}e_r \oplus \mathcal{O}f_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}f_r. \quad (2.4)$$

De plus, les éléments de K_B sont les éléments g de $Sp(W)$ dont la matrice dans la base $(e_1, \dots, e_l, e_{l+1}, \dots, e_r, f_1, \dots, f_l, f_{l+1}, \dots, f_r)$ s'écrit par blocs :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \varpi a_{12} & \varpi b_{11} & \varpi b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \varpi b_{21} & b_{22} \\ \varpi^{-1} c_{11} & c_{12} & d_{11} & d_{12} \\ c_{21} & c_{22} & \varpi d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

les matrices $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}$ étant à coefficients dans \mathcal{O} , a_{11} et d_{11} (resp. a_{22} et d_{22}) étant carrées d'ordre l (resp. $r - l$).

2.4 On garde les notations du paragraphe précédent. Soit $B \subset W$ un bon réseau, $l = l(B)$ et $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r)$ une base autoduale de W vérifiant la relation 2.4. Alors, le réseau dual de B est

$$B^* = \mathcal{O}e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}e_r \oplus \varpi^{-1} \mathcal{O}f_1 \oplus \dots \oplus \varpi^{-1} \mathcal{O}f_l \oplus \mathcal{O}f_{l+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}f_r$$

et l'on a

$$B \subset A \subset B^*,$$

où $A = \mathcal{O}_{e_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{e_r} \oplus \mathcal{O}_{f_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{f_r}$ est un réseau autodual. On pose $K = K_A$. Les éléments de K sont les éléments de $Sp(W)$ dont la matrice dans la base $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r)$ est à coefficients dans \mathcal{O} .

Nous avons vu que $b^* = B^*/B$, muni de la forme β_{b^*} est un espace symplectique de dimension $2l$ sur \mathbb{F}_q . On vérifie que la famille de vecteurs

$$(p_{b^*}(e_1), \dots, p_{b^*}(e_l), p_{b^*}(\varpi^{-1}f_1), \dots, p_{b^*}(\varpi^{-1}f_l))$$

est une base symplectique de (b^*, β_{b^*}) .

De même, $b = B/\varpi B^*$ est naturellement muni d'une structure de \mathbb{F}_q -espace vectoriel et de la forme symplectique β_b définie par

$$\beta_b(p_b(w), p_b(w')) = p_{\mathbb{F}_q}(\varpi^{-\lambda_\psi} \beta(w, w')), \quad w, w' \in B,$$

où p_b désigne la projection naturelle de B sur b . La famille de vecteurs

$$(p_b(e_{l+1}), \dots, p_b(e_r), p_b(f_{l+1}), \dots, p_b(f_r))$$

est une base symplectique de b de sorte que la dimension de b sur \mathbb{F}_q est $2(r-l)$.

Le groupe K_B laissant invariant B , laisse invariant B^* . Il agit donc naturellement dans b^* (resp. b) et cette action induit un morphisme de K_B dans $Sp(b^*)$ (resp. $Sp(b)$), le groupe symplectique associé à (b^*, β_{b^*}) (resp. (b, β_b)); ce morphisme est noté $p_{Sp(b^*)}$ (resp. $p_{Sp(b)}$). On a le résultat suivant :

Lemme 2.4.1 *Le morphisme $p_{Sp(b^*)} \times p_{Sp(b)}$ est surjectif de K_B sur le groupe $Sp(b^*) \times Sp(b)$.*

Démonstration : Rappelons que si (W, β) est un espace symplectique sur le corps F , le groupe symplectique $Sp(W)$ est engendré par les transvections symplectiques de (W, β) qui sont les transformations de W de la forme $\tau_{a,v} : w \mapsto w + a\beta(v, w)v$, $a \in F$, $v \in W$. Il est immédiat que les transvections $\tau_{a,v}$ telles que $a \in \varpi^{1-\lambda_\psi}\mathcal{O}$ et $v \in B^*$ (resp. $a \in \varpi^{-\lambda_\psi}\mathcal{O}$ et $v \in B$) sont dans K_B et que leur image par $p_{Sp(b^*)} \times p_{Sp(b)}$ parcourt l'ensemble des éléments de la forme (τ, Id) (resp. (Id, τ)) où τ est une transvection symplectique de (b^*, β_{b^*}) (resp. (b, β_b)). D'où le lemme. ■

On désigne par K'_B le noyau du morphisme $p_{Sp(b^*)} \times p_{Sp(b)}$. On a

$$K'_B = \{g \in K_B, (g-1)B \subset \varpi B^* \text{ et } (g-1)B^* \subset B\}.$$

Les éléments de K'_B sont les éléments de $Sp(W)$ dont la matrice dans la base $(e_l, \dots, e_l,$

$e_{l+1}, \dots, e_r, f_1, \dots, f_l, f_{l+1}, \dots, f_r$) s'écrit par blocs

$$\begin{pmatrix} I_l + \varpi a_{11} & \varpi a_{12} & \varpi^2 b_{11} & \varpi b_{12} \\ a_{21} & I_{r-l} + \varpi a_{22} & \varpi b_{21} & \varpi b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & I_l + \varpi d_{11} & d_{12} \\ c_{21} & \varpi c_{22} & \varpi d_{21} & I_{r-l} + \varpi d_{22} \end{pmatrix}$$

les matrices a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} et d_{ij} étant des matrices à coefficients dans \mathcal{O} , a_{11} et d_{11} (resp. a_{22} et d_{22}) étant carrées d'ordre l (resp. $r - l$).

2.5 On garde les notations du paragraphe précédent. Soit n un entier naturel. On désigne par O_n l'anneau $\mathcal{O}/\varpi^{n+1}\mathcal{O}$ et par p_{O_n} la projection canonique de \mathcal{O} sur O_n . Alors, $O_0 = \mathbb{F}_q$ et si $n \geq 1$, O_n est un anneau local principal fini dont les idéaux propres sont les puissances k -ièmes de l'idéal maximal $\varpi\mathcal{O}/\varpi^{n+1}\mathcal{O}$, $1 \leq k \leq n$. De plus la projection p_{O_m} passe au quotient, pour tout entier $m > n$, en un morphisme d'anneau $p_{n,m} : O_m \longrightarrow O_n$; on note plus simplement $p_n = p_{n,n+1}$. La famille des O_n munie des morphismes $p_{n,m}$ constitue un système projectif d'anneaux dont il est bien connu que l'anneau \mathcal{O} , muni de sa topologie, est la limite projective : $\mathcal{O} = \varprojlim O_n$.

On pose $b_n = B/\varpi^{n+1}B^*$ et $b_n^* = B^*/\varpi^n B$. Ce sont des O_n -modules (et donc des O_m -modules, pour $m \geq n$) de type fini. On a $b_0 = b$ et $b_0^* = b^*$. Lorsque $n \geq 1$, b_n et b_n^* admettent $2r$ générateurs et ils sont libres si et seulement si $l = 0$ ou $l = r$ (dans ce cas, on a $b_n = b_{n+1}^*$ ou $b_n^* = b_{n+1}$). On désigne par p_{b_n} (resp. $p_{b_n^*}$) la projection canonique de B (resp. B^*) sur b_n (resp. b_n^*); elle induit une projection naturelle de b_{n+1} (resp. b_{n+1}^*) sur b_n (resp. b_n^*) notée p_n , laquelle est compatible avec les structures de O_{n+1} -modules.

On désigne par $End_B(W)$ la sous-algèbre de $End_k(W)$ constituée des endomorphismes linéaires laissant invariant B et B^* et par $GL_B(W)$ le sous-groupe de $GL(W)$ constitué des éléments qui sont, ainsi que leur inverse, dans $End_B(W)$. Tout élément g de $End_B(W)$ définit un élément \dot{g}_n (resp. \dot{g}_n^*) de $End_{O_n}(b_n)$ (resp. $End_{O_n}(b_n^*)$) en posant $\dot{g}_n p_{b_n}(v) = p_{b_n}(gv)$, $v \in B$ (resp. $\dot{g}_n^* p_{b_n^*}(v) = p_{b_n^*}(gv)$, $v \in B^*$). On vérifie que l'application $g \mapsto \dot{g}_n$ (resp. $g \mapsto \dot{g}_n^*$) est un morphisme surjectif d'algèbres de $End_B(W)$ sur $End_{O_n}(b_n)$ (resp. $End_{O_n}(b_n^*)$) de noyau $I_n = \{g \in End_k(W) | gB \subset \varpi^{n+1}B^*\}$ (resp. $I_n^* = \{g \in End_k(W) | gB^* \subset \varpi^n B\}$). De plus, pour tout entier $m > n$, le morphisme $g \mapsto \dot{g}_m$ (resp. $g \mapsto \dot{g}_m^*$) passe au quotient en un morphisme d'algèbres $r_{n,m} : End_{O_m}(b_m) \longrightarrow End_{O_n}(b_n)$ (resp. $r_{n,m}^* : End_{O_m}(b_m^*) \longrightarrow End_{O_n}(b_n^*)$); on note plus simplement $r_n = r_{n,n+1}$ (resp. $r_n^* = r_{n,n+1}^*$).

Lemme 2.5.1 *Soit n un entier naturel.*

(i) *L'application $g \mapsto \dot{g}_n$ (resp. $g \mapsto \dot{g}_n^*$) définit un morphisme surjectif de groupes de $GL_B(W)$ sur le groupe linéaire $GL_{O_n}(b_n)$ (resp. $GL_{O_n}(b_n^*)$), de noyau $Id + I_n$ (resp. $Id + I_n^*$).*

(ii) Pour tout entier $m > n$, l'application $r_{n,m}$ (resp. $r_{n,m}^*$) induit un morphisme surjectif de groupes de $GL_{O_m}(\mathfrak{b}_m)$ sur $GL_{O_n}(\mathfrak{b}_n)$ (resp. $GL_{O_m}(\mathfrak{b}_m^*)$ sur $GL_{O_n}(\mathfrak{b}_n^*)$) de noyau $Id + I_n/I_m$ (resp. $Id + I_n^*/I_m^*$).

Démonstration : L'assertion (ii) est une conséquence immédiate de l'assertion (i). Montrons l'assertion (i).

Il est clair que l'application $g \mapsto \dot{g}_n$ (resp. $g \mapsto \dot{g}_n^*$) est un morphisme de groupes de $GL_B(W)$ dans $GL_{O_n}(\mathfrak{b}_n)$ (resp. $GL_{O_n}(\mathfrak{b}_n^*)$), de noyau $Id + I_n$ (resp. $Id + I_n^*$). Il reste à montrer la surjectivité.

Supposons que $n = 0$. Soient $e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r$ une base autoduale de W telle que $B = \mathcal{O}\varpi e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}\varpi e_l \oplus \mathcal{O}e_{l+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}e_r \oplus \mathcal{O}f_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}f_r$ et U (resp. V) le sous-espace vectoriel de W engendré par $e_1, \dots, e_l, f_1, \dots, f_l$ (resp. $e_{l+1}, \dots, e_r, f_{l+1}, \dots, f_r$). Alors $G = \{g \in GL(W) | g|_U = Id \text{ et } g(B \cap V) = B \cap V\}$ (resp. $G^* = \{g \in GL(W) | g(B^* \cap U) = B^* \cap U \text{ et } g|_V = Id\}$) est un sous-groupe de $GL_B(W)$ et son image par l'application $g \mapsto \dot{g}_0$ (resp. $g \mapsto \dot{g}_0^*$) est $GL_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{b})$ (resp. $GL_{\mathbb{F}_q}(\mathfrak{b}^*)$).

Supposons $n \geq 1$. Soit $g \in End_B(W)$. Dire que $\dot{g}_n \in GL_{O_n}(\mathfrak{b}_n)$ (resp. $\dot{g}_n^* \in GL_{O_n}(\mathfrak{b}_n^*)$) revient à dire qu'il existe $g' \in End_B(W)$ tel que $gg' \in Id + I_n$ (resp. $gg' \in Id + I_n^*$). Or, $Id + I_n$ et $Id + I_n^*$ sont des sous-groupes de $GL_B(W)$. Il est alors clair que $g \in GL_B(W)$. ■

Le O_n -module \mathfrak{b}_n (resp. \mathfrak{b}_n^*) est naturellement muni d'une forme symplectique, $\beta_{\mathfrak{b}_n}$ (resp. $\beta_{\mathfrak{b}_n^*}$) définie par

$$\beta_{\mathfrak{b}_n}(p_{\mathfrak{b}_n}(v), p_{\mathfrak{b}_n}(w)) = p_{O_n}(\varpi^{-\lambda_\psi} \beta(v, w)), v, w \in B \quad (2.6)$$

$$\beta_{\mathfrak{b}_n^*}(p_{\mathfrak{b}_n^*}(v), p_{\mathfrak{b}_n^*}(w)) = p_{O_n}(\varpi^{1-\lambda_\psi} \beta(v, w)), v, w \in B^* \quad (2.7)$$

On désigne par $Sp(\mathfrak{b}_n)$ (resp. $Sp(\mathfrak{b}_n^*)$) le groupe symplectique correspondant. Il est clair que, si $g \in K_B$, $\dot{g}_n \in Sp(\mathfrak{b}_n)$ (resp. $\dot{g}_n^* \in Sp(\mathfrak{b}_n^*)$) et que, pour tout entier $m > n$, le morphisme $r_{n,m}$ (resp. $r_{n,m}^*$) envoie $Sp(\mathfrak{b}_m)$ dans $Sp(\mathfrak{b}_n)$ (resp. $Sp(\mathfrak{b}_m^*)$ dans $Sp(\mathfrak{b}_n^*)$). La famille des $Sp(\mathfrak{b}_n)$ (resp. $Sp(\mathfrak{b}_n^*)$), munie des morphismes $r_{n,m}$ (resp. $r_{n,m}^*$) constitue un système projectif de groupes.

Lemme 2.5.2 (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme de groupes $r_n : Sp(\mathfrak{b}_{n+1}) \longrightarrow Sp(\mathfrak{b}_n)$ (resp. $r_n^* : Sp(\mathfrak{b}_{n+1}^*) \longrightarrow Sp(\mathfrak{b}_n^*)$) est surjectif.

(ii) L'application $g \longrightarrow (\dot{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $g \longrightarrow (\dot{g}_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$) induit un isomorphisme de groupes topologiques de K_B sur $\varprojlim Sp(\mathfrak{b}_n)$ (resp. $\varprojlim Sp(\mathfrak{b}_n^*)$).

Démonstration : (i) On montre la surjectivité de r_n , la démonstration de celle de r_n^* étant identique.

Supposons dans un premier temps que $n \geq 1$. Soit $g \in Sp(\mathfrak{b}_n)$. D'après le lemme 2.5.1, il existe $\tilde{g} \in GL_{O_{n+1}}(\mathfrak{b}_{n+1})$ tel que $r_n(\tilde{g}) = g$. Il suffit de montrer qu'il existe $h \in I_n/I_{n+1}$ tel que $(Id + h)\tilde{g} \in Sp(\mathfrak{b}_{n+1})$. Définissons l'application $\gamma : \mathfrak{b}_{n+1} \times \mathfrak{b}_{n+1} \longrightarrow O_{n+1}$ en posant $\gamma(v, w) = \beta_{\mathfrak{b}_{n+1}}(\tilde{g}^{-1}v, \tilde{g}^{-1}w) - \beta_{\mathfrak{b}_{n+1}}(v, w)$; c'est une application bilinéaire alternée sur \mathfrak{b}_{n+1} à valeurs dans l'idéal minimal $\varpi^{n+1}\mathcal{O}/\varpi^{n+2}\mathcal{O}$. Soit $h \in I_n/I_{n+1}$. Dire que $(Id + h)\tilde{g} \in Sp(\mathfrak{b}_{n+1})$ revient à dire que l'on a

$$\beta_{\mathfrak{b}_{n+1}}((Id + h)v, (Id + h)w) - \beta_{\mathfrak{b}_{n+1}}(v, w) = \gamma(v, w), \quad v, w \in \mathfrak{b}_{n+1} \quad (2.8)$$

Mais, h étant un élément de I_n/I_{n+1} , on a $h\mathfrak{b}_{n+1} \subset \varpi^{n+1}B^*/\varpi^{n+2}B^*$. Comme $n \geq 1$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \beta_{\mathfrak{b}_{n+1}}(h\mathfrak{b}_{n+1}, h\mathfrak{b}_{n+1}) &\subset p_{O_{n+1}}(\varpi^{2(n+1)-\lambda_\psi}\beta(B^*, B^*)) \\ &\subset p_{O_{n+1}}(\varpi^{2n+1}\mathcal{O}) \subset p_{O_{n+1}}(\varpi^{n+2}\mathcal{O}) = \{0\}. \end{aligned}$$

La relation 2.8 s'écrit alors

$$\beta_{\mathfrak{b}_{n+1}}(hv, w) + \beta_{\mathfrak{b}_{n+1}}(v, hw) = \gamma(v, w), \quad v, w \in \mathfrak{b}_{n+1}.$$

Or, la forme $\beta_{\mathfrak{b}_{n+1}}$ étant symplectique, il existe $h' \in End_{O_{n+1}}(\mathfrak{b}_{n+1})$ tel que

$$\gamma(v, w) = \beta_{\mathfrak{b}_{n+1}}(h'v, w) = \beta_{\mathfrak{b}_{n+1}}(v, h'w), \quad v, w \in \mathfrak{b}_{n+1}.$$

Il suffira de prendre $h = \frac{1}{2}h'$, dès que l'on aura montré que $h' \in I_n/I_{n+1}$. Or, on a $\gamma(v, w) \in \varpi^{n+1}\mathcal{O}/\varpi^{n+2}\mathcal{O}$, $v, w \in \mathfrak{b}_{n+1}$. On en déduit que, pour tout $w \in \varpi B/\varpi^{n+2}B^*$, $\beta_{\mathfrak{b}_{n+1}}(h'\mathfrak{b}_{n+1}, w) = \{0\}$. Autrement dit, $h'\mathfrak{b}_{n+1} \subset (\varpi B/\varpi^{n+1}B^*)^\perp = \varpi^{n+1}B^*/\varpi^{n+2}B^*$, i.e. $h' \in I_n/I_{n+1}$ comme voulu.

Il reste à examiner le cas $n = 0$. Mais, il suit du lemme 2.4.1 que l'application $g \mapsto \dot{g}_0$ est un morphisme surjectif de K_B sur $Sp(\mathfrak{b}) = Sp(\mathfrak{b}_0)$. Il suffit alors de remarquer que $\dot{g}_0 = r_0(\dot{g}_1)$, $g \in K_B$.

(ii) On donne la démonstration pour l'application $g \longrightarrow (\dot{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, celle pour l'autre application étant identique. Pour tout entier naturel n , la matrice d'un élément de I_n dans une base quelconque du \mathcal{O} -module B est à coefficients dans $\varpi^n\mathcal{O}$. On en déduit que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{0\}$ et que la famille $(Id + I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de voisinages de l'élément neutre dans $GL_B(W)$. Il est alors immédiat que l'application $g \longrightarrow (\dot{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un morphisme injectif de groupes topologiques de K_B dans $\varprojlim Sp(\mathfrak{b}_n)$. Comme K_B est compact, il nous suffit de montrer que ce morphisme est surjectif.

Soit donc $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \varprojlim Sp(\mathfrak{b}_n)$. Pour tout entier naturel n , soit $\tilde{g}_n \in GL_B(W)$ tel que $\dot{\tilde{g}}_n = g_n$. Par construction, on a $\tilde{g}_{n+1} - \tilde{g}_n \in I_n$. Il s'ensuit que la suite (\tilde{g}_n) converge dans $End_B(W)$ vers un élément g appartenant à $GL_B(W)$ et vérifiant $\dot{g}_n = g_n$, $n \in \mathbb{N}$. Il reste à voir que $g \in Sp(W)$. Soit $v, w \in B$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$p_{O_n}(\varpi^{-\lambda_\psi}(\beta(gv, gw) - \beta(v, w))) = \beta_{b_n}(\dot{g}_n p_{b_n}(v), \dot{g}_n p_{b_n}(w)) - \beta_{b_n}(p_{b_n}(v), p_{b_n}(w)) = 0$.
On en déduit que $\beta(gv, gw) - \beta(v, w) \in \cap_{n \in \mathbb{N}} \varpi^{-\lambda_\psi + n} \mathcal{O} = \{0\}$. D'où le lemme. ■

2.6 On reprend les notations du paragraphe 2.4. On note $x = A/B$; c'est un sous-espace totalement isotrope maximal de b^* . On voit que x est le sous-espace vectoriel de b^* engendré par $(p_{b^*}(e_1), \dots, p_{b^*}(e_l))$. Inversement : si y est un lagrangien de b^* , alors $A = p_{b^*}^{-1}(y)$ est un réseau autodual de W tel que $B \subset A \subset B^*$ et il existe une base autoduale $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r)$ de W vérifiant la relation 2.4 et engendrant A comme \mathcal{O} -module.

D'autre part, $Sp(b^*)$ est engendré par J_l et le sous-groupe parabolique $P_{b^*} = Sp(b^*)(x)$, stabilisateur du lagrangien x dans $Sp(b^*)$.

Si on note $P_B = p_{Sp(b^*)}^{-1}(P_{b^*})$, on a :

$$K'_B \subset K \text{ et } K \cap K_B = P_B.$$

On voit alors que P_B est l'ensemble des $g \in Sp(W)$ dont la matrice dans la base

$$(e_1, \dots, e_l, e_{l+1}, \dots, e_r, f_1, \dots, f_l, f_{l+1}, \dots, f_r)$$

s'écrit par blocs

$$g = \begin{pmatrix} a_{11} & \varpi a_{12} & \varpi b_{11} & \varpi b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \varpi b_{21} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & d_{11} & d_{12} \\ c_{21} & c_{22} & \varpi d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

les matrices a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} et d_{ij} étant à coefficients dans \mathcal{O} , a_{11} et d_{11} (resp. a_{22} et d_{22}) étant carrées d'ordre l (resp. $r - l$).

On désigne par ς_B l'élément de K_B dont la matrice dans cette même base est

$$\varsigma_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varpi I_l & 0 \\ 0 & I_{r-l} & 0 & 0 \\ -\varpi^{-1} I_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{r-l} \end{pmatrix}$$

Lemme 2.6.1 Avec les notations ci-dessus, K_B est engendré par P_B et ς_B .

Démonstration : On a :

- $\varsigma_B(e_i) = -\varpi^{-1} f_i$, $1 \leq i \leq l$,
- $\varsigma_B(\varpi^{-1} f_i) = e_i$, $1 \leq i \leq l$.

Il s'en suit que $p_{Sp(b^*)}(\varsigma_B) = J_l$. Le résultat voulu s'en déduit facilement. \blacksquare

On désigne par N_B (resp. \overline{N}_B) le sous-groupe de K_B constitué des éléments $x_B(a)$ (resp. $y_B(a)$), ayant dans la base

$$(e_1, \dots, e_l, e_{l+1}, \dots, e_r, f_1, \dots, f_l, f_{l+1}, \dots, f_r)$$

une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} I_l & 0 & \varpi a & 0 \\ 0 & I_{r-l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{r-l} \end{pmatrix} \quad (\text{resp.} \quad \begin{pmatrix} I_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{r-l} & 0 & 0 \\ \varpi^{-1}a & 0 & I_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{r-l} \end{pmatrix}),$$

où a est une matrice symétrique d'ordre l à coefficients dans \mathcal{O} .

Corollaire 2.6.1 *Le groupe K_B est engendré par P_B et \overline{N}_B .*

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du lemme 2.6.1 et de ce que d'une part N_B est un sous-groupe de P_B et que d'autre part on a $\varsigma_B = x_B(I_l)y_B(-I_l)x_B(I_l)$. \blacksquare

Remarque. Il résulte de [2] que les sous-groupes K_B sont les stabilisateurs des sommets de l'immeuble du groupe $Sp(W)$. Pour être plus précis, si l'on choisit une base autoduale $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r)$ de W et si, pour $0 \leq l \leq r$, on pose $B_l = \mathcal{O}\varpi e_1 \oplus \dots \mathcal{O}\varpi e_l \oplus \mathcal{O}e_{l+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}e_r \oplus \mathcal{O}f_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}f_r$, alors les K_{B_l} , $0 \leq l \leq r$, sont les stabilisateurs des sommets d'une chambre, les cas où $l = 0$ et $l = r$ correspondant aux deux sommets hyperspéciaux. De plus, parmi les sous-groupes K_{B_l} , $0 \leq l \leq r$, seuls K_{B_0} et K_{B_r} sont conjugués par un élément du groupe des similitudes symplectiques : si on désigne par d_r la similitude symplectique dont la matrice dans la base autoduale choisie est

$$\begin{pmatrix} \varpi I_r & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix}$$

on a $K_{B_r} = d_r K_{B_0} d_r^{-1}$.

2.7 On garde les notations du paragraphe précédent. Il est clair que $B^* \backslash \varpi B^*$ est une partie de W qui est invariante sous l'action de K_B .

Lemme 2.7.1 (i) *Pour tout $b \in B^* \backslash B$ (resp. $b \in B \backslash \varpi B^*$), on a $K'_B b = b + B$ (resp. $K'_B b = b + \varpi B^*$).*

(ii) *Les orbites de K_B dans $B^* \backslash \varpi B^*$ sont $B^* \backslash B$ et $B \backslash \varpi B^*$.*

(iii) Les orbites de P_B dans $B^* \backslash \varpi B^*$ sont $B^* \backslash A$, $A \backslash B$ et $B \backslash \varpi B^*$.

Démonstration : Il est clair que $B^* \backslash B$ et $B \backslash \varpi B^*$ (resp. $B^* \backslash A$, $A \backslash B$ et $B \backslash \varpi B^*$) sont invariants sous l'action de K_B (resp. P_B). Il reste à montrer (i) et le fait que chacun de ces ensembles est une K_B -orbite (resp. P_B -orbite).

On vérifie facilement que l'image de P_B par le morphisme $p_{Sp(b^*)} \times p_{Sp(b)}$ est $P_{b^*} \times Sp(b)$. Comme les orbites de P_{b^*} dans b^* sont $\{0\}$, $x \backslash \{0\}$ et $b^* \backslash x$ et comme $Sp(b)$ (resp. $Sp(b^*)$) agit transitivement dans $b \backslash \{0\}$ (resp. $b^* \backslash \{0\}$) il suffit de montrer que, pour un élément particulier b de $B^* \backslash B$ (resp. $B \backslash \varpi B^*$), on a $K'_B b = b + B$ (resp. $K'_B b = b + \varpi B^*$) : on peut prendre $b = e_1$ (resp $b = e_{l+1}$).

Dans la suite de la démonstration, on identifie chaque élément de W (resp. $GL(W)$) avec le vecteur colonne de ses coordonnées (resp. sa matrice) dans la base $(e_1, \dots, e_l, e_{l+1}, \dots, e_r, f_1, \dots, f_l, f_{l+1}, \dots, f_r)$.

Supposons que $b = e_1 \in B^* \backslash B$ et soit $u \in B$. Alors, on a $u = \begin{pmatrix} \varpi \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \mu_1 \in \mathcal{O}^l$, $\lambda_2, \mu_2 \in \mathcal{O}^{r-l}$, et l'élément $k = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & t_a \end{pmatrix}$ où

$$a = \begin{pmatrix} I_l + \varpi \lambda_1 {}^t e_1 & 0 \\ \lambda_2 {}^t e_1 & I_{r-l} \end{pmatrix}$$

est dans K'_B et vérifie $k(e_1 + u) = e_1 + u'$ avec $u' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu'_1 \\ \mu'_2 \end{pmatrix}$, μ'_i , $i = 1, 2$, étant à coefficients dans \mathcal{O} . Mais alors l'élément $h = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ c & I_r \end{pmatrix}$ avec

$$c = - \begin{pmatrix} \mu'_1 {}^t e_1 + e_1 {}^t \mu'_1 - {}^t \mu'_1 e_1 E_{11} & e_1 {}^t \mu'_2 \\ \mu'_2 {}^t e_1 & 0 \end{pmatrix}$$

est dans K'_B et vérifie $hk(e_1 + u) = e_1$.

Plaçons nous dans le cas où $b = e_{l+1} \in B \backslash \varpi B^*$ et soit $u \in \varpi B^*$. Alors, on peut écrire $b = \begin{pmatrix} 0 \\ e_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} \varpi \lambda_1 \\ \varpi \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \varpi \mu_2 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1, \mu_1 \in \mathcal{O}^l$, $\lambda_2, \mu_2 \in \mathcal{O}^{r-l}$, et l'élément $k = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & t_a \end{pmatrix}$ où

$$a = \begin{pmatrix} I_l & \varpi \lambda_1 {}^t e_1 \\ 0 & I_{r-l} + \varpi \lambda_2 {}^t e_1 \end{pmatrix}$$

est dans K'_B et vérifie $k(e_{l+1} + u) = e_{l+1} + u'$ avec $u' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu'_1 \\ \varpi \mu'_2 \end{pmatrix}$, μ'_i , $i = 1, 2$, étant à coefficients dans \mathcal{O} . Mais alors l'élément $h = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ c & I_r \end{pmatrix}$ avec

$$c = - \begin{pmatrix} 0 & \mu_1'^t e_1 \\ e_1'^t \mu_1' & \varpi(\mu_2'^t e_1 + e_1'^t \mu_2') - \varpi^t \mu_2' e_1 E_{11} \end{pmatrix}$$

est dans K_B' et vérifie $hk(e_{l+1} + u) = e_{l+1}$. ■

3 La représentation de Weil

Dans cette section, nous rappelons certains résultats sur la représentation de Weil et le groupe métaplectique. On peut consulter [21], [11, Chapitre 2], [17], [3], [14] et [4].

Dans la suite, les représentations induites que nous considérons sont des représentations induites unitaires à droite. Plus précisément, si G est un groupe localement compact, H un de ses sous-groupes fermés, tous deux unimodulaires, et ρ une représentation unitaire de H dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} , $\text{Ind}_H^G \rho$ désigne la représentation de G agissant par translations à droite dans l'espace des fonctions $\varphi : G \longrightarrow \mathcal{H}$ qui vérifient

$$\begin{aligned} \varphi(hg) &= \rho(h)\varphi(g), \quad g \in G, \quad h \in H, \\ \int_{H \backslash G} \|\varphi(g)\|^2 dg &< +\infty \end{aligned}$$

où dg désigne une mesure de Radon G -invariante sur $H \backslash G$.

3.1 Dans ce paragraphe, F désigne de nouveau soit un anneau local fini de caractéristique différente de 2, soit un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle différente de 2 et ψ un caractère unitaire non trivial de F . Si F est un anneau local fini, on suppose que ψ est primitif, en ce sens que son noyau ne contient pas d'autre idéal que $\{0\}$.

Soit (W, β) un F -espace symplectique ; si F est un corps, on note $2r$ la dimension de W sur F . Le groupe de Heisenberg associé est l'ensemble $H(W) = W \times F$, muni de la multiplication

$$(w, t)(w', t') = (w + w', t + t' + \frac{1}{2}\beta(w, w')), \quad w, w' \in W, \quad t, t' \in F.$$

Muni de la topologie produit, $H(W)$ est un groupe localement compact.

Le centre de $H(W)$ est $\{0\} \times F$ que l'on identifie à F , via l'application :

$$t \in F \longmapsto (0, t) \in H(W).$$

On identifie également W à un sous-ensemble de $H(W)$ au moyen de l'application :

$$w \in W \longmapsto (w, 0) \in H(W).$$

Dans ces conditions, on a $w^{-1} = -w$, pour tout $w \in W$.

Par le théorème de Stone Von-Neumann (voir [3, 2] pour le cas où F n'est pas un corps), nous savons qu'il existe une unique (à équivalence près) représentation unitaire irréductible (ρ_ψ, \mathcal{H}) de $H(W)$ de caractère central ψ . On l'appelle la représentation de Schrödinger de caractère central ψ de $H(W)$. On la note $\rho_{W,\psi}$ lorsque l'on souhaite faire apparaître qu'il s'agit d'une représentation du groupe de Heisenberg construit sur W .

Nous rappelons comment construire de telles représentations, selon [11, Chapitre 2] et [3]. Soit $A \subset W$ un sous-groupe fermé. On pose

$$A^* = \{v \in W, \quad \psi(\beta(v, a)) = 1, \text{ pour tout } a \in A\}.$$

Alors A^* est un sous-groupe fermé de W , appelé sous-groupe dual : lorsque F est un corps local et A est un réseau, on retrouve la notion de réseau dual (voir 2.2). On dit que A est autodual si $A = A^*$. Lorsque F est un corps local, les sous-espaces lagrangiens et les réseaux autoduaux sont des exemples de sous-groupes autoduaux.

Lorsque F est un anneau local fini, tout sous-espace lagrangien est un sous-groupe autodual. On sait que si F est un corps, il existe des lagrangiens. Nous allons montrer qu'il en existe pour tout anneau local fini.

Soit \mathfrak{m} l'idéal maximal de F . Son annulateur \mathfrak{s} est l'unique idéal propre minimal de F . Fixons un élément non nul $s_0 \in \mathfrak{s}$. Alors l'application $a \mapsto as_0$ passe au quotient en un isomorphisme de F -modules du corps résiduel $\overline{F} = F/\mathfrak{m}$ sur \mathfrak{s} . On désigne par μ un tel isomorphisme.

Lemme 3.1.1 *Soit F un anneau local fini et (W, β) un F -espace symplectique. Soit $A \subset W$ un sous-module.*

(i) *On a $A^{\perp\perp} = A$.*

(ii) *On suppose que l'on a les inclusions $\mathfrak{m}A \subset A^\perp \subset A$. Alors, A/A^\perp est naturellement muni d'une structure de \overline{F} -espace vectoriel, la restriction $\beta|_A$ de β à A prend ses valeurs dans \mathfrak{s} et l'application $\mu^{-1} \circ \beta|_A$ passe au quotient à A/A^\perp en une forme symplectique.*

Démonstration : Pour le point (i), voir [4, Lemma 2.1].

Soit A un sous-module de W vérifiant les hypothèses du (ii). L'unique chose à vérifier est que $\beta|_A$ est à valeurs dans \mathfrak{s} . Or ceci résulte de ce que, compte tenu des hypothèses, $\mathfrak{m}\beta(A, A) = \beta(\mathfrak{m}A, A) \subset \beta(A^\perp, A) = \{0\}$. ■

Lemme 3.1.2 *Soit F un anneau local fini et W un F -espace symplectique. Alors W admet des sous-espaces lagrangiens.*

Démonstration : Soit $A \subset W$ un sous- F -module totalement isotrope et maximal. Il suffit de montrer que $A = A^\perp$. Or, il suit de [4, Lemma 10.1] que $\mathfrak{m}A^\perp \subset A$ (le résultat cité est énoncé sous l'hypothèse que A est isotrope, $Sp(W)$ -invariant et maximal, mais il est clair que la démonstration reste valable si l'on y remplace $Sp(W)$ par n'importe lequel de ses sous-groupes). Comme $A^{\perp\perp} = A$, on voit alors que A^\perp vérifie les hypothèses du (ii) du lemme 3.1.1. Par suite, $\mu^{-1} \circ \beta|_{A^\perp}$ passe au quotient en une forme symplectique sur le \overline{F} -espace vectoriel A^\perp/A et l'image réciproque dans A^\perp d'un lagrangien de cet espace symplectique est un sous-groupe autodual de W contenant A . On a donc $A = A^\perp$. ■

Soit A un sous-groupe autodual de W . Alors, $A \times F$ est un sous-groupe fermé de $H(W)$ et la formule

$$\psi_A(w, t) = \psi(t), (w, t) \in A \times F,$$

définit un caractère de $A \times F$. On note alors $\rho_\psi^A = \text{Ind}_{A \times F}^{H(W)} \psi_A$ la représentation induite du caractère ψ_A de $A \times F$ à $H(W)$. La représentation ρ_ψ^A se réalise dans l'espace \mathcal{H}_ψ^A des fonctions $\varphi : W \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifient

$$\begin{aligned} \varphi(a + w) &= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(w, a)\right)\varphi(w), a \in A, w \in W, \\ \int_{W/A} |\varphi(w)|^2 d\dot{w} &< +\infty, \end{aligned}$$

où $d\dot{w}$ désigne une mesure de Haar sur le groupe additif W/A , par la formule

$$\rho_\psi^A(w, t)\varphi(w') = \psi\left(t + \frac{1}{2}\beta(w', w)\right)\varphi(w' + w), w, w' \in W, t \in F. \quad (3.1)$$

Théorème 3.1.1 (i) Soit A un sous-groupe autodual de W . Alors la représentation ρ_ψ^A est irréductible et appartient à la classe de ρ_ψ .

(ii) Soit A et B deux sous-groupes autoduaux de W et $d\dot{b}$ une mesure de Haar sur le groupe additif quotient $B/A \cap B$. Pour $\varphi \in \mathcal{H}_\psi^A$ continue à support compact modulo A , on pose

$$\mathcal{I}_{B,A}\varphi(w) = \int_{B/A \cap B} \varphi(w + b)\psi\left(\frac{1}{2}\beta(b, w)\right) d\dot{b}, w \in W. \quad (3.2)$$

Alors l'intégrale 3.2 converge pour tout w , la fonction $\mathcal{I}_{B,A}\varphi$ est un élément de \mathcal{H}_ψ^B et $\mathcal{I}_{B,A} : \mathcal{H}_\psi^A \rightarrow \mathcal{H}_\psi^B$ se prolonge de manière unique en un opérateur continu, encore noté $\mathcal{I}_{B,A}$, entrelaçant les représentations ρ_ψ^A et ρ_ψ^B .

Supposons que F soit un corps. Soit X et Y deux lagrangiens de W tels que $W = X \oplus Y$. Alors, pour un bon choix de la mesure de Haar dx sur X , l'application $\varphi \mapsto \varphi|_X$ est une isométrie de \mathcal{H}_ψ^Y sur $L^2(X, dx)$ permettant d'identifier ces deux espaces. La représentation ρ_ψ^Y réalisée dans $L^2(X, dx)$ est alors donnée par les formules suivantes :

$$\rho_\psi^Y(x, 0)\varphi(x') = \varphi(x' + x), \quad x, x' \in X \quad (3.3)$$

$$\rho_\psi^Y(y, 0)\varphi(x') = \psi(\beta(x', y))\varphi(x'), \quad y \in Y, \quad x' \in X. \quad (3.4)$$

Lorsque F est un corps local et A est un lagrangien (resp. un réseau) de W , on dit que ρ_ψ^A est un modèle de Schrödinger (resp. latticiel) de la représentation ρ_ψ .

3.2 On garde les notations du paragraphe précédent. Le groupe symplectique $Sp(W)$ opère par automorphismes dans $H(W)$ par la formule

$$x.(w, t) = (xw, t), \quad \text{pour tout } w \in W, \quad t \in F.$$

Cette action fixe F point par point.

Soit (ρ_ψ, \mathcal{H}) une représentation unitaire irréductible de $H(W)$ de caractère central ψ et désignons par $U(\mathcal{H})$ le groupe des transformations unitaires de l'espace de Hilbert \mathcal{H} . On note $\widehat{Sp(W)}_\psi$ le sous-groupe topologique de $Sp(W) \times U(\mathcal{H})$ formé des couples $(g, M(g))$ vérifiant :

$$M(g)\rho_\psi(h)M(g)^{-1} = \rho_\psi(g.h), \quad h \in H(W). \quad (3.5)$$

On voit que si $(g, M(g)) \in \widehat{Sp(W)}_\psi$ alors $(g, zM(g)) \in \widehat{Sp(W)}_\psi$ pour tout $z \in \mathbb{U}$, le groupe des nombres complexes de module 1. Il suit du théorème de Stone Von-Neumann que $\widehat{Sp(W)}_\psi$ est une extension centrale de $Sp(W)$ par les opérateurs scalaires de norme 1 ; on a une suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow \mathbb{U} \xrightarrow{\alpha_1} \widehat{Sp(W)}_\psi \xrightarrow{\alpha_2} Sp(W) \longrightarrow 1, \quad (3.6)$$

où $\alpha_1 : z \mapsto (1, z\text{Id})$ et $\alpha_2 : (g, M(g)) \mapsto g$. La représentation métaplectique S_ψ de $\widehat{Sp(W)}_\psi$ agissant dans \mathcal{H} est donnée par

$$S_\psi(g, M(g)) = M(g). \quad (3.7)$$

On la note $S_{W,\psi}$ si l'on souhaite faire apparaître qu'il s'agit de la représentation métaplectique associée au groupe symplectique $Sp(W)$.

En fait, on peut se restreindre à un revêtement d'ordre au plus 2 de $Sp(W)$ grâce au résultat suivant :

Théorème 3.2.1 *(i) Si F est un anneau local fini, il existe un morphisme de groupes de $Sp(W)$ dans $\widehat{Sp(W)}_\psi$ qui scinde la suite exacte 3.6. Lorsque F est le corps fini \mathbb{F}_q , à l'exception du cas où $q = 3$ et $\dim W = 2$, cet homomorphisme est unique.*

(ii) Si F est un corps local non archimédien et W est non nul, la suite exacte 3.6 ne se scinde pas, mais il existe un unique sous-groupe $Mp(W)_\psi$ de $\widehat{Sp(W)}_\psi$ tel que la restriction de α_2 à ce sous-groupe soit surjective et ait un noyau d'ordre 2. Ce sous-groupe est fermé et la restriction α_2 à ce sous-groupe en fait un revêtement d'ordre 2 de $Sp(W)$.

Voir [18] et [3] pour le point (i) et [21] pour le point (ii).

Lorsque F est un corps local non archimédien, on sait qu'à isomorphisme canonique près, il n'existe qu'un revêtement d'ordre 2 de $Sp(W)$, non trivial. Ce revêtement s'identifie donc de manière canonique au sous-groupe $Mp(W)_\psi$ de $\widehat{Sp(W)}_\psi$: désormais on le note $Mp(W)$ et on l'appelle le groupe métaplectique de l'espace symplectique W ou le revêtement métaplectique du groupe $Sp(W)$. Dans la suite, on appelle représentation de Weil de type ψ et on note S_ψ ou $S_{W,\psi}$ si l'on tient à préciser, la restriction de la représentation S_ψ à $Mp(W)$.

Si A est un sous-groupe autodual de W , on note $\widehat{Sp(W)}_\psi^A$, $Mp(W)_\psi^A$ et S_ψ^A ou $S_{W,\psi}^A$ les objets précédents construits en utilisant la réalisation ρ_ψ^A dans l'espace \mathcal{H}_ψ^A de la représentation ρ_ψ . On parle alors de modèle de Schrödinger ou de modèle latticiel de la représentation de Weil, suivant que A est un lagrangien ou bien un réseau.

Lorsque F est un anneau local fini, on appelle représentation de Weil de type ψ et on note S_ψ ou $S_{W,\psi}$, la représentation composée de S_ψ avec un homomorphisme de $Sp(W)$ dans $\widehat{Sp(W)}_\psi$ scindant la suite exacte 3.6. Étant donnée une représentation de Weil, toutes les autres s'écrivent comme produit de celle-ci par un caractère unitaire de $Sp(W)$. Si A est un sous-groupe autodual de W , on désignera par S_ψ^A ou $S_{W,\psi}^A$ une représentation de Weil construite en utilisant la réalisation ρ_ψ^A dans l'espace \mathcal{H}_ψ^A de la représentation ρ_ψ .

Plus généralement, F étant toujours un anneau local fini, si G est un groupe fini et si $\gamma : G \rightarrow Sp(W)$ est un morphisme de groupes, on appelle représentation de Weil de type ψ de G relative au morphisme γ , toute représentation S de G dans l'espace de la représentation ρ_ψ vérifiant la relation

$$S(g)\rho_\psi(h)S(g)^{-1} = \rho_\psi(\gamma(g).h), \quad g \in G, \quad h \in H(W).$$

Ici encore, étant donnée une représentation de Weil, toutes les autres s'écrivent comme produit de celle-ci par un caractère unitaire de G .

Si $F = \mathbb{F}_q$, $Sp(W)$ admet une unique représentation de Weil, sauf dans le cas $q = 3$ et $\dim W = 2$ (à l'exception de ce cas, le groupe $Sp(W)$ est parfait). Cela dit, il existe dans tous les cas un choix canonique, que nous décrivons dans le paragraphe suivant : dans la suite, on convient que la représentation de Weil S_ψ est celle correspondant à ce choix.

3.3 Dans ce paragraphe, on garde les notations du paragraphe précédent et on suppose que F est un corps fini. On rappelle que si η est un caractère additif de F , l'indice de Weil relatif à η est l'application $\omega_\eta : F^\times \longrightarrow \mathbb{U}$ définie par

$$\omega_\eta(a) = [F]^{-\frac{1}{2}} \sum_{t \in F} \eta(at^2). \quad (3.8)$$

Si $a \in F^\times$, on désigne par $a\eta$ le caractère additif $t \mapsto \eta(at)$ de F . On pose alors

$$\omega = \omega_{\frac{1}{2}\psi}. \quad (3.9)$$

Soit X un sous-espace lagrangien de W et soit $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r)$ une base symplectique de W telle que (e_1, \dots, e_r) soit une base de X .

Si $g \in Sp(W)$, on pose

$$j(g) = r - \dim X \cap gX \quad (3.10)$$

Pour $0 \leq j \leq r$, soit

$$\Omega_j = \{g \in Sp(W) \mid j(g) = j\}.$$

Alors, Ω_0 n'est autre que P , le sous-groupe parabolique de $Sp(W)$ stabilisateur de X , chaque Ω_j est une double classe sous P et $Sp(W)$ est la réunion disjointe des Ω_j , $0 \leq j \leq r$. Pour $S \subset \{1, \dots, r\}$, on désigne par τ_S l'élément de $Sp(W)$ tel que

$$\tau_S \cdot e_i = \begin{cases} f_i & \text{si } i \in S \\ e_i & \text{si } i \notin S \end{cases} \quad \tau_S \cdot f_i = \begin{cases} -e_i & \text{si } i \in S \\ f_i & \text{si } i \notin S \end{cases}$$

Alors, si $\text{card} S = j$, on a : $\Omega_j = P\tau_S P$.

D'après [17, Lemma 5.1], il existe une application $\theta : Sp(W) \longrightarrow \mathbb{F}^\times / (\mathbb{F}^\times)^2$ telle que

- $\theta(p_1 g p_2) = \theta(p_1) \theta(g) \theta(p_2)$, $p_1, p_2 \in P$, $g \in Sp(W)$;
- $\theta(\tau_S) = 1$, $S \subset \{1, \dots, r\}$;
- $\theta(p) = \det_X(p) \pmod{(\mathbb{F}^\times)^2}$, $p \in P$.

Si $g \in Sp(W)$, on pose

$$m(g) = \omega(\theta(g))^{-1} \omega(1)^{1-j(g)}, \quad (3.11)$$

où ω est l'indice de Weil relatif au caractère $\frac{1}{2}\psi$ (voir les formules 3.8 et 3.9).

Soit μ_X la mesure de Haar sur X de masse totale 1. Si $g \in Sp(W)$ on pose

$$S_\psi^X(g) = m(g) q^{\frac{j(g)}{2}} M_X(g), \quad (3.12)$$

où $M_X(g)$ est l'opérateur de l'espace \mathcal{H}_ψ^X défini par

$$M_X(g)\varphi(w) = \int_X \psi\left(\frac{1}{2}\beta(x, w)\right) \varphi(g^{-1}(w+x)) d\mu_X(x), \quad \varphi \in \mathcal{H}_\psi^X, w \in W. \quad (3.13)$$

Le résultat suivant est alors conséquence de [14, 4.2, Lemma] :

Lemme 3.3.1 *L'application*

$$g \longmapsto (g, S_\psi^X(g))$$

est un homomorphisme de groupes de $Sp(W)$ dans $\widehat{Sp(W)}_\psi^X$ scindant la suite exacte 3.6.

3.4 Dans ce paragraphe, on suppose que F est un anneau local fini et on se donne un sous-groupe G de $Sp(W)$. Nous rappelons un certain nombre des résultats de [3] et [4] concernant la décomposition des représentations de Weil sur F .

On désigne par $\mathcal{F}(W)$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes sur W . On munit $\mathcal{F}(W)$ de la structure de $Sp(W)$ -module définie par $g \cdot \varphi(w) = \varphi(g^{-1}w)$, $w \in W$.

Soit (ρ_ψ, \mathcal{H}) une représentation de Schrödinger de $H(W)$ et soit S une représentation de Weil de type ψ de $Sp(W)$. La représentation S induit une structure de $Sp(W)$ -module dans $End_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$ définie par $g \cdot A = S(g)AS(g^{-1})$. On a alors le résultat suivant (voir [3, Theorem 4.5]) :

Théorème 3.4.1 *L'application $\varphi \mapsto \sum_{w \in W} \varphi(w) \rho_\psi(w, 0)$ de $\mathcal{F}(W)$ dans $End_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$ est un isomorphisme de $Sp(W)$ -module.*

On munit le sous-groupe G de $Sp(W)$ de la mesure de Haar normalisée. Le théorème précédent a pour conséquence le résultat suivant (voir [3, Corollary 4.6]) :

Corollaire 3.4.1 *Le carré de la norme, comme élément de $L^2(G)$, du caractère de la restriction à G d'une représentation de Weil de $Sp(W)$ est égal au nombre d'orbites du groupe G dans W .*

Les résultats présentés dans la suite sont ceux de [4, paragraphe 4]. Soit $U \subset W$ un sous-module isotrope, non nul et $Sp(W)$ -invariant. Alors, $\overline{U^\perp} = U^\perp / U$ est un F -espace symplectique pour la forme symplectique $\overline{\beta}$ définie par $\overline{\beta}(v + U, w + U) = \beta(v, w)$. On pose $H(U^\perp) = U^\perp \times F$: c'est un sous-groupe du groupe de Heisenberg $H(W)$ et l'application $p_U : (v, t) \mapsto (v + U, t)$ est un morphisme surjectif de $H(U^\perp)$ sur $H(\overline{U^\perp})$. De plus l'action du groupe $Sp(W)$ dans U^\perp passe au quotient en une action dans $\overline{U^\perp}$ par automorphismes symplectiques, fournissant ainsi un morphisme de groupes $r_U : Sp(W) \longrightarrow Sp(\overline{U^\perp})$. Soit $\rho_{U^\perp, \psi}$ l'inflation de la représentation de Schrödinger de $H(\overline{U^\perp})$ via p_U à $H(U^\perp)$ et soit σ une représentation de Weil de type ψ de $Sp(W)$ relative à r_U , que l'on réalise dans le même espace \mathcal{H}_σ : σ est le produit tensoriel de l'inflation d'une représentation de Weil de $Sp(\overline{U^\perp})$ via r_U à $Sp(W)$ par un caractère de $Sp(W)$. Comme nous l'avons vu, le groupe $Sp(W)$ agit par automorphismes dans le groupe $H(W)$ et il laisse stable le sous-groupe $H(U^\perp)$. Nous pouvons donc considérer le groupe produit semi-direct $Sp(W) \ltimes H(W)$ et son sous-groupe $Sp(W) \ltimes H(U^\perp)$. On définit alors la représentation $\sigma \rho_{U^\perp, \psi}$ de $Sp(W) \ltimes H(U^\perp)$ dans l'espace \mathcal{H}_σ en posant $\sigma \rho_{U^\perp, \psi}(gh) = \sigma(g) \rho_{U^\perp, \psi}(h)$, $g \in Sp(W)$ et $h \in H(U^\perp)$. Soit $R^{U, \sigma}$ la représentation de

$Sp(W) \ltimes H(W)$ définie par

$$R^{U,\sigma} = \text{Ind}_{Sp(W) \ltimes H(U^\perp)}^{Sp(W) \ltimes H(W)} \sigma \rho_{U^\perp, \psi}$$

On note $S^{U,\sigma}$ la restriction de la représentation $R^{U,\sigma}$ à $Sp(W)$. Si χ un caractère de $Sp(W)$, on a $S^{U,\chi \otimes \sigma} = \chi \otimes S^{U,\sigma}$.

On vérifie que l'espace de la représentation $R^{U,\sigma}$ s'identifie, via l'application de restriction au sous-ensemble W du sous-groupe $H(W)$ du produit semi-direct $Sp(W) \ltimes H(W)$, à l'espace \mathcal{H}^U des fonctions φ définies sur W , à valeurs dans \mathcal{H}_σ , qui vérifient la relation

$$\varphi(x+u) = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(x,u)\right) \rho_{U^\perp, \psi}(u) \varphi(x), \quad x \in W, u \in U^\perp. \quad (3.14)$$

Si $x \in W$, on note \hat{x} (resp. \dot{x}) sa classe dans le module quotient W/U^\perp (resp. W/U). Le groupe $Sp(W)$ agit naturellement dans W/U^\perp et si $x \in W$, on désigne par $G(\hat{x})$ le stabilisateur de $\hat{x} = x + U^\perp$ dans G . Rappelons que l'on identifie x à l'élément $(x, 0)$ du groupe de Heisenberg $H(W)$. Alors $xG(\hat{x})x^{-1}$ est un sous-groupe de $G \ltimes H(U^\perp)$. Plus précisément, si $g \in G(\hat{x})$, on a

$$xgx^{-1} = g(g^{-1}x - x, \frac{1}{2}\beta(x, g^{-1}x)).$$

On définit une représentation, que nous noterons $\sigma_{G, \dot{x}}$, de $G(\hat{x})$ dans \mathcal{H}_σ en posant pour $g \in G(\hat{x})$,

$$\begin{aligned} \sigma_{G, \dot{x}}(g) &= \sigma \rho_{U^\perp, \psi}(xgx^{-1}) \\ &= \sigma(g) \rho_{U^\perp, \psi}(g^{-1}x - x, \frac{1}{2}\beta(x, g^{-1}x)) \end{aligned}$$

(on vérifie que la représentation $\sigma_{G, \dot{x}}$ ne dépend que de la classe \dot{x} de x dans W/U) et on considère la représentation $S_{G, \dot{x}}$ de G définie par

$$S_{G, \dot{x}} = \text{Ind}_{G(\hat{x})}^G \sigma_{G, \dot{x}}.$$

On désigne par $\mathcal{H}_{G, \dot{x}}$ l'espace de la représentation $S_{G, \dot{x}}$. Il est constitué des fonctions $\varphi : G \mapsto \mathcal{H}_\sigma$ qui vérifient

$$\varphi(hg) = \sigma_{G, \dot{x}}(h) \varphi(g), \quad g \in G, h \in G(\hat{x}).$$

Si $\varphi \in \mathcal{H}_{G, \dot{x}}$, $\mathcal{I}_{G, \dot{x}} \varphi$ désigne la fonction élément de \mathcal{H}^U à support dans l'orbite de x modulo U^\perp sous l'action de G telle que

$$\mathcal{I}_{G, \dot{x}} \varphi(g.x) = \sigma(g) \varphi(g^{-1}), \quad g \in G.$$

Si $x = 0$, on a $S_{G, 0} = \sigma|_G$. Lorsque $G = Sp(W)$, on note simplement $\sigma_{\dot{x}}$ (resp. $S_{\dot{x}}$) au lieu de $\sigma_{G, \dot{x}}$ (resp. $S_{G, \dot{x}}$).

Si \mathcal{H} est l'espace d'une représentation π de $Sp(W)$, on désigne par \mathcal{H}^\pm le sous-espace propre de $-Id$ dans \mathcal{H} pour la valeur propre ± 1 . Comme $\{\pm Id\}$ est un sous-groupe central de $Sp(W)$, le sous-espace \mathcal{H}^\pm est invariant sous la représentation π et on désigne par π^\pm la représentation de $Sp(W)$ dans ce sous-espace qui en résulte, lorsque celui-ci est non nul. On a clairement $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$ et donc $\pi = \pi^\pm$ ou $\pi = \pi^+ \oplus \pi^-$, suivant que l'un des espaces \mathcal{H}^\pm est nul ou non.

Dans ce qui suit, on suppose que $G = Sp(W)$. Soit $x \in W$. Si $x \in U^\perp$, on a $G(\hat{x}) = Sp(W)$ et deux cas se présentent alors : si $\overline{U^\perp} = \{0\}$, $S_{\hat{x}} = \sigma_{\hat{x}}$ est de dimension 1 et irréductible ; dans le cas contraire, $S_{\hat{x}} = \sigma_{\hat{x}}$ est somme directe des sous-représentations S_x^\pm . Par contre, si $x \notin U^\perp$, $-Id$ n'est pas un élément de $G(\hat{x})$ et la représentation $\sigma_{\hat{x}}$ s'étend au sous-groupe $\widetilde{G(\hat{x})} = \{\pm Id\}G(\hat{x})$ de $Sp(W)$ en la représentation σ_x^\pm en décidant que $\sigma_x^\pm(-Id) = \pm Id$. Alors, on a

$$S_{\hat{x}}^\pm = \text{Ind}_{\widetilde{G(\hat{x})}}^{Sp(W)} \sigma_x^\pm$$

et donc

$$S_{\hat{x}} = S_{\hat{x}}^+ \oplus S_{\hat{x}}^-.$$

Lemme 3.4.1 (i) La restriction à $H(W)$ de la représentation $R^{U,\sigma}$ est équivalente à la représentation de Schrödinger ρ_ψ .

(ii) La représentation $S^{U,\sigma}$ est une représentation de Weil de type ψ de $Sp(W)$ et toute représentation de Weil de type ψ de $Sp(W)$ est obtenue ainsi.

(iii) Soit G un sous-groupe de $Sp(W)$. Si $x \in W$, le sous-espace $\mathcal{H}_{G,\hat{x}}^U$ de \mathcal{H}^U constitué des fonctions à support dans l'orbite de x modulo U^\perp sous l'action de G est $(S^{U,\sigma})|_G$ -invariant. De plus, l'application $\mathcal{I}_{G,\hat{x}}$ est un isomorphisme de G -modules de l'espace $\mathcal{H}_{G,\hat{x}}$ de la représentation $S_{G,\hat{x}}$ sur $\mathcal{H}_{G,\hat{x}}^U$. Ainsi, la représentation de G induite par $S^{U,\sigma}$ dans $\mathcal{H}_{G,\hat{x}}^U$ est équivalente à la représentation $S_{G,\hat{x}}$.

(iv) Si $X \subset W$ est un ensemble de représentants des G -orbites dans $W/U^\perp \setminus \{0\}$, on a :

$$(S^{U,\sigma})|_G = \sigma|_G \oplus \left(\bigoplus_{x \in X} S_{G,\hat{x}} \right) \quad (3.15)$$

(v) Si $X \subset W$ est un ensemble de représentants des $Sp(W)$ -orbites dans $W/U^\perp \setminus \{0\}$, on a :

$$S^{U,\sigma} = \begin{cases} \sigma \oplus (\bigoplus_{x \in X} S_{\hat{x}}^+ \oplus S_{\hat{x}}^-) & \text{si } \overline{U^\perp} = \{0\} \\ (\sigma^+ \oplus \sigma^-) \oplus (\bigoplus_{x \in X} S_{\hat{x}}^+ \oplus S_{\hat{x}}^-) & \text{si } \overline{U^\perp} \neq \{0\} \end{cases} \quad (3.16)$$

Jusqu'à la fin de ce paragraphe, on suppose que l'anneau local fini F n'est pas un corps. Soit $U \subset W$ un sous-module isotrope, $Sp(W)$ -invariant et maximal pour cette propriété. Rappelons que \mathfrak{m} désigne l'idéal maximal de F , \mathfrak{s} son idéal minimal et \overline{F}

le corps résiduel de F . D'après [4, Lemma 10.1], on a $\mathfrak{m}U^\perp \subset U$. Alors, il suit du lemme 3.1.1 que $\overline{U^\perp}$ est naturellement muni d'une structure de \overline{F} -espace vectoriel, que la forme symplectique $\overline{\beta}$ prend ses valeurs dans \mathfrak{s} et que, si μ est un isomorphisme de F -module de $\overline{F} = F/\mathfrak{m}$ sur \mathfrak{s} , l'application $\mu^{-1} \circ \overline{\beta}$ en fait un \overline{F} -espace vectoriel symplectique. De plus, les groupes symplectiques pour $\overline{\beta}$ et $\mu^{-1} \circ \overline{\beta}$ sont identiques et notés $Sp(\overline{U^\perp})$.

Désignons par $H_F(\overline{U^\perp})$ (resp. $H_{\overline{F}}(\overline{U^\perp})$) le groupe de Heisenberg construit sur $\overline{U^\perp}$ considéré comme un F -module (resp. \overline{F} -espace vectoriel) symplectique. Alors l'isomorphisme μ induit un plongement

$$\begin{aligned} \mu_* : H_{\overline{F}}(\overline{U^\perp}) &\longrightarrow H_F(\overline{U^\perp}) \\ (u, t) &\longmapsto (u, \mu(t)). \end{aligned}$$

L'application μ_* commute avec l'action de $Sp(\overline{U^\perp})$ par automorphismes dans les deux groupes de Heisenberg.

La composée de la représentation de Schrödinger de $H_F(\overline{U^\perp})$ de caractère central ψ avec le morphisme μ_* est clairement la représentation de Schrödinger de $H_{\overline{F}}(\overline{U^\perp})$ de caractère central $\psi \circ \mu$: comme ψ est un caractère primitif, $\psi \circ \mu$ est un caractère non trivial de \overline{F} . Il est alors immédiat qu'une représentation de Weil de type ψ de $Sp(\overline{U^\perp})$ est également une représentation de Weil de type $\psi \circ \mu$ et réciproquement.

Il suit de ces considérations que les représentations de Weil pour $Sp(W)$ peuvent être construites à partir des représentations de Weil pour un groupe symplectique sur le corps résiduel de F , de même que les composantes d'une telle représentation qui apparaissent dans le lemme 3.4.1.

3.5 Soit n un entier naturel et $B \subset W$ un bon réseau. Nous allons appliquer les résultats du paragraphe précédent pour déterminer la décomposition en irréductibles des représentations de Weil des groupes $Sp(\mathfrak{b}_n)$ et $Sp(\mathfrak{b}_n^*)$ introduits au paragraphe 2.5.

Rappelons que \mathfrak{b}_n et \mathfrak{b}_n^* sont des modules sur $O_n = \mathcal{O}/\varpi^{n+1}\mathcal{O}$. L'annulateur dans O_n de \mathfrak{b}_n (resp. \mathfrak{b}_n^*) est trivial si et seulement si $\varpi B^* \subsetneq B$ (resp. $B \subsetneq B^*$), tandis que $\mathfrak{b}_n = \mathfrak{b}_{n-1}^*$ (resp. $\mathfrak{b}_n^* = \mathfrak{b}_{n-1}$) dans le cas contraire. Nous pouvons donc nous placer dans la situation suivante : ψ est un caractère primitif de O_n et on considère les représentations de Weil de type ψ pour $Sp(\mathfrak{b}_n)$ (resp. $Sp(\mathfrak{b}_n^*)$) lorsque $\varpi B^* \subsetneq B$ (resp. $B \subsetneq B^*$).

Lemme 3.5.1 (i) *L'espace symplectique \mathfrak{b}_n admet un unique sous-module isotrope invariant sous l'action de $Sp(\mathfrak{b}_n)$ et maximal, noté \mathfrak{u} . On a*

$$\mathfrak{u} = \varpi^{m+1}B^*/\varpi^{n+1}B^*, \mathfrak{u}^\perp = \varpi^m B/\varpi^{n+1}B^* \text{ et } \overline{\mathfrak{u}^\perp} = \mathfrak{b}, \text{ si } n = 2m,$$

$$\mathfrak{u} = \varpi^{m+1}B/\varpi^{n+1}B^*, \mathfrak{u}^\perp = \varpi^{m+1}B^*/\varpi^{n+1}B^* \text{ et } \overline{\mathfrak{u}^\perp} = \mathfrak{b}^*, \text{ si } n = 2m + 1.$$

(ii) *L'espace symplectique \mathfrak{b}_n^* admet un unique sous-module isotrope invariant sous*

l'action de $Sp(\mathfrak{b}_n^*)$ et maximal, noté u^* . On a

$$u^* = \varpi^m B / \varpi^n B, u^{*\perp} = \varpi^m B^* / \varpi^n B \text{ et } \overline{u^{*\perp}} = \mathfrak{b}^*, \text{ si } n = 2m,$$

$$u^* = \varpi^{m+1} B^* / \varpi^n B, u^{*\perp} = \varpi^m B / \varpi^n B \text{ et } \overline{u^{*\perp}} = \mathfrak{b}, \text{ si } n = 2m + 1.$$

Démonstration : Comme le morphisme naturel de K_B dans les groupes symplectiques $Sp(\mathfrak{b}_n)$ et $Sp(\mathfrak{b}_n^*)$ est surjectif et comme les seuls réseaux de W qui sont K_B -invariants sont ceux proportionnels à B ou B^* , on voit que les sous-modules de \mathfrak{b}_n ou \mathfrak{b}_n^* invariants par le groupe symplectique sont image de $\varpi^s B$ ou $\varpi^s B^*$, $s \geq 0$ par la projection naturelle de B (resp. B^*) sur \mathfrak{b}_n ou \mathfrak{b}_n^* . On en déduit facilement le lemme. ■

Théorème 3.5.1 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et ψ un caractère primitif de O_n . On reprend les notations du lemme 3.5.1.*

(i) *Soit S une représentation de Weil de type ψ de $Sp(\mathfrak{b}_n)$. Alors, il existe une unique représentation de Weil, σ , de type ψ de $Sp(\mathfrak{b}_n)$ relative au morphisme naturel de $Sp(\mathfrak{b}_n)$ dans $Sp(\mathfrak{b})$ (resp. $Sp(\mathfrak{b}^*)$) si n est pair (resp. impair) telle que $S = S^{u, \sigma}$.*

Dans tous les cas, les représentations apparaissant dans la formule 3.16 du lemme 3.4.1 sont irréductibles et deux à deux inéquivalentes. Lorsque $B \subsetneq B^$, il y en a $2n + 2$; lorsque $B = B^*$, il y en a $n + 2$. Elles sont monomiales si $B = B^*$ et n est impair.*

(ii) *Soit S une représentation de Weil de type ψ de $Sp(\mathfrak{b}_n^*)$. Alors, il existe une unique représentation de Weil, σ , de type ψ de $Sp(\mathfrak{b}_n^*)$ relative au morphisme naturel de $Sp(\mathfrak{b}_n^*)$ dans $Sp(\mathfrak{b}^*)$ (resp. $Sp(\mathfrak{b})$) si n est pair (resp. impair) telle que $S = S^{u^*, \sigma}$.*

Dans tous les cas, les représentations apparaissant dans la formule 3.16 du lemme 3.4.1 sont irréductibles et deux à deux inéquivalentes. Lorsque $\varpi B^ \subsetneq B$, il y en a $2n + 2$; lorsque $\varpi B^* = B$, il y en a $n + 2$. Elles sont monomiales si $\varpi B^* = B$ et n est impair.*

Démonstration : Nous faisons la démonstration dans le cas (i), la démonstration dans l'autre cas étant similaire. La première assertion est claire, compte tenu des résultats du paragraphe précédent et de ceux du lemme 3.5.1. Soit c (resp. d) le nombre de $Sp(\mathfrak{b}_n)$ -orbites dans \mathfrak{b}_n (resp. \mathfrak{b}_n/u^\perp). Compte tenu du corollaire 3.4.1 et du lemme 3.4.1, il suffit de montrer que $c = 2d$, si $B \subsetneq B^*$ ou n est pair, et $c = 2d - 1$ dans le cas contraire. Cependant, comme le morphisme naturel de K_B dans $Sp(\mathfrak{b}_n)$ est surjectif, on voit que $c - 1$ est le nombre des K_B -orbites dans $B \setminus \varpi^{n+1} B^*$, tandis que $d - 1$ est celui des K_B -orbites dans $B \setminus \varpi^m B$ (resp. $B \setminus \varpi^{m+1} B^*$), si $n = 2m$ (resp. $n = 2m + 1$). Or, d'après le lemme 2.7.1, l'ensemble des K_B -orbites dans $B \setminus \varpi^m B$ est $\{\varpi^t B \setminus \varpi^{t+1} B^* | 0 \leq t \leq m - 1\} \sqcup \{\varpi^t B^* \setminus \varpi^t B | 1 \leq t \leq m\}$, de cardinal $2m$ (resp. $\{\varpi^t B \setminus \varpi^{t+1} B | 0 \leq t \leq m - 1\}$, de cardinal m) si $B \subsetneq B^*$ (resp. $B = B^*$). Pour la même raison, l'ensemble des K_B -orbites dans $B \setminus \varpi^{m+1} B^*$ est $\{\varpi^t B \setminus \varpi^{t+1} B^* | 0 \leq t \leq m\} \sqcup \{\varpi^t B^* \setminus \varpi^t B | 1 \leq t \leq m\}$, de cardinal $2m + 1$ (resp. $\{\varpi^t B \setminus \varpi^{t+1} B | 0 \leq t \leq m\}$, de cardinal $m + 1$) si $B \subsetneq B^*$ (resp. $B = B^*$). Le théorème en découle. ■

Remarque. Dans [4] G. Cliff, D. McNeilly et F. Szechtman établissent que la formule 3.16 du lemme 3.4.1 donne la décomposition en irréductibles de la représentation de Weil de $Sp(W)$ considérée, lorsque R est un anneau local fini et principal et W est un R -module libre. Notre théorème en est une conséquence, uniquement lorsque $B = B^*$ ou $B = \varpi B^*$.

Par ailleurs, dans [6] Dutta et Prasad démontrent que les représentations de Weil du groupe symplectique d'un module symplectique de type fini sur un anneau local fini et principal se décompose en irréductibles avec multiplicité 1 et donnent une description de ces derniers en terme de la combinatoire des orbites du groupe symplectique dans le module symplectique. Cependant, leur description ne fait pas apparaître explicitement ces irréductibles comme modules induits.

3.6 Dans ce paragraphe, on suppose que F est un corps local non archimédien. Soit $X \subset W$ un sous-espace lagrangien, P_X le sous-groupe parabolique de $Sp(W)$ stabilisateur de X , N_X son radical unipotent et $Y \subset W$ un lagrangien supplémentaire de X .

Un élément g de $Sp(W)$ s'identifie à une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans laquelle $a \in \text{End}(X)$, $b \in \text{Hom}(Y, X)$, $c \in \text{Hom}(X, Y)$ et $d \in \text{End}(Y)$. Remarquons que la forme symplectique β induit une dualité entre X et Y , permettant d'identifier de manière naturelle Y avec l'espace dual de X : on a donc une notion d'opérateur symétrique $b : Y \rightarrow X$. Le sous-groupe N_X est alors le sous-groupe des matrices de la forme $x(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $b \in \text{Hom}(Y, X)$ symétrique.

Il résulte de [5, Chapitre II, 11, Lemme] que la restriction du revêtement métaplectique à N_X admet un scindage unique. On peut donc considérer le groupe N_X comme un sous-groupe du groupe métaplectique $Mp(W)$.

Rappelons que nous avons réalisé la représentation ρ_ψ^X de $H(W)$ dans l'espace $L^2(Y, dy)$, où dy est une mesure de Haar sur Y : on en déduit une réalisation S_ψ^X de la représentation métaplectique dans ce même espace.

Le résultat suivant est alors conséquence de [11, Chapitre 2, II.6 et II.9, Lemme] :

Lemme 3.6.1 *La restriction de la représentation métaplectique S_ψ^X à N_X est donnée par*

$$S_\psi^X(x(b))\varphi(y) = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(by, y)\right)\varphi(y), \quad y \in Y, \quad \varphi \in L^2(Y, dy),$$

où b parcourt l'ensemble des homomorphismes symétriques de Y dans X .

4 Étude du revêtement métaplectique au dessus d'un sous-groupe compact maximal

Dans cette section, nous montrons que le revêtement métaplectique est scindé au dessus de tout sous-groupe compact maximal et nous donnons une description de la restriction de la représentation métaplectique à un tel sous-groupe. Pour ce faire, nous présentons le modèle latticiel généralisé de la représentation métaplectique introduit par Shu Yen Pan dans [14, numéro 2.3]. Désormais, nous reprenons les notations de la section 2.

4.1 Soit $B \subset W$ un bon réseau. On a vu que $\mathfrak{b}^* = B^*/B$ est un \mathbb{F}_q -espace vectoriel symplectique de dimension $2l$, où $l = l(B)$. On peut donc considérer la représentation $(\rho_{\overline{\psi}}, \mathcal{H}_{\overline{\psi}})$ du groupe de Heisenberg $H(\mathfrak{b}^*)$ de caractère central $\overline{\psi}$. Il suit de ce que B est un bon réseau que $H(B^*) = B^* \times \varpi^{\lambda_{\psi}-1}\mathcal{O}$ est un sous-groupe de $H(W)$. Alors, l'application $p_{H(\mathfrak{b}^*)} : H(B^*) \longrightarrow H(\mathfrak{b}^*)$ définie par

$$p_{H(\mathfrak{b}^*)}(w, t) = (p_{\mathfrak{b}^*}(w), p_{\mathbb{F}_q}(\varpi^{1-\lambda_{\psi}}t))$$

est un homomorphisme surjectif de groupes localement compacts. On désigne par $\tilde{\rho}_{\overline{\psi}}$ la représentation de $H(B^*)$ relevant la représentation $\rho_{\overline{\psi}}$ via le morphisme $p_{H(\mathfrak{b}^*)}$. On note de même le prolongement de $\tilde{\rho}_{\overline{\psi}}$ à $\overline{H}(B^*) = B^* \times k$ dont la restriction à k est un multiple du caractère ψ .

On considère alors la représentation $\rho_{\psi}^B = \text{Ind}_{H(B^*)}^{H(W)} \tilde{\rho}_{\overline{\psi}}$ que l'on réalise dans l'espace de Hilbert \mathcal{H}_{ψ}^B des fonctions $\varphi : W \longrightarrow \mathcal{H}_{\overline{\psi}}$ qui vérifient

$$\varphi(b + w) = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(w, b)\right)\tilde{\rho}_{\overline{\psi}}(b)(\varphi(w)), \quad b \in B^*, w \in W, \quad (4.1)$$

$$\int_{W/B^*} \|\varphi(w)\|^2 dw < +\infty, \quad (4.2)$$

dans lequel $H(W)$ agit comme suit :

$$(\rho_{\psi}^B(w, t)\varphi)(w') = \psi\left(t + \frac{1}{2}\beta(w', w)\right)\varphi(w' + w), \quad w, w' \in W, t \in k.$$

Proposition 4.1.1 *La représentation ρ_{ψ}^B est unitaire irréductible, équivalente à ρ_{ψ} .*

Démonstration : Soit A un réseau autodual tel que $B \subset A \subset B^*$ et soit $\mathfrak{x} = A/B$ dont on a vu que c'est un lagrangien de \mathfrak{b}^* . Comme $p_{H(\mathfrak{b}^*)}^{-1}(\mathfrak{x} \times \mathbb{F}_q) = A \times \varpi^{\lambda_{\psi}-1}\mathcal{O}$, il est clair que la représentation $\text{Ind}_{A \times k}^{\overline{H}(B^*)} \psi_A$ est équivalente à la représentation $\tilde{\rho}_{\overline{\psi}}$. Notre résultat est alors conséquence du théorème d'induction par étage. \blacksquare

On dit que ρ_{ψ}^B est le modèle latticiel généralisé de la représentation ρ_{ψ} associé au réseau B . On note $\widehat{Sp(W)}_{\psi}^B$, $Mp(W)_{\psi}^B$ et S_{ψ}^B les objets $\widehat{Sp(W)}_{\psi}$, $Mp(W)_{\psi}$ et S_{ψ} obtenus en

utilisant la réalisation ρ_ψ^B de la représentation ρ_ψ ; on dit que S_ψ^B est le modèle latticiel généralisé de la représentation métaplectique associé au réseau B .

Soit A un réseau autodual tel que $B \subset A \subset B^*$, $x = A/B$ le lagrangien correspondant de b^* et ρ_ψ^x la représentation d'espace \mathcal{H}_ψ^x équivalente à la représentation ρ_ψ de $H(b^*)$. On réalise alors l'espace \mathcal{H}_ψ^B comme l'espace des fonctions à valeurs dans \mathcal{H}_ψ^x vérifiant les conditions 4.1 et 4.2. Il suit facilement de la démonstration de la proposition 4.1.1 que l'on a alors le résultat suivant (voir aussi [14, 4.3, Lemma])

Corollaire 4.1.1 *Soit B un bon réseau de W et A un réseau autodual tel que $B \subset A \subset B^*$. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_\psi^B$ la fonction $\mathcal{I}_{A,B}(\varphi)$ définie sur W par*

$$\mathcal{I}_{A,B}(\varphi)(w) = \varphi(w)(0), \quad w \in W,$$

est un élément de \mathcal{H}_ψ^A et l'application $\mathcal{I}_{A,B} : \mathcal{H}_\psi^B \longrightarrow \mathcal{H}_\psi^A$ est un opérateur entreliant les représentations ρ_ψ^B et ρ_ψ^A .

4.2 On garde les notations du paragraphe précédent et on reprend celles du paragraphe 2.4. On note \tilde{S}_ψ la représentation de K_B relevant la représentation S_ψ de $Sp(b^*)$ via le morphisme $p_{Sp(b^*)}$.

Considérons le produit semi-direct $K_B \ltimes H(W)$. Il contient comme sous-groupe $K_B \ltimes \overline{H}(B^*)$. On définit une représentation $\tilde{S}_\psi \tilde{\rho}_\psi$ de $K_B \ltimes \overline{H}(B^*)$ en décidant que

$$\tilde{S}_\psi \tilde{\rho}_\psi(gh) = \tilde{S}_\psi(g) \tilde{\rho}_\psi(h), \quad g \in K_B, \quad h \in \overline{H}(B^*). \quad (4.3)$$

On considère la représentation R_ψ^B de $K_B \ltimes H(W)$ définie par

$$R_\psi^B = \text{Ind}_{K_B \ltimes \overline{H}(B^*)}^{K_B \ltimes H(W)} \tilde{S}_\psi \tilde{\rho}_\psi \quad (4.4)$$

dont l'espace est clairement \mathcal{H}_ψ^B et on note S_ψ^B sa restriction à K_B .

Lemme 4.2.1 (i) *Si $g \in K_B$, l'opérateur $S_\psi^B(g)$ de \mathcal{H}_ψ^B est donné par*

$$S_\psi^B(g)\varphi(w) = \tilde{S}_\psi(g)[\varphi(g^{-1}w)], \quad \varphi \in \mathcal{H}_\psi^B, \quad w \in W. \quad (4.5)$$

(ii) *L'application*

$$g \longmapsto (g, S_\psi^B(g)) \quad (4.6)$$

est un homomorphisme de groupes de K_B dans $\widehat{Sp(W)}_\psi^B$ scindant la suite exacte 3.6.

Démonstration : Le point (i) est conséquence immédiate de la définition de la représentation R_ψ^B comme représentation induite.

Le point (ii) résulte de ce que la restriction de R_ψ^B à $H(W)$ est la représentation de Schrödinger ρ_ψ^B . ■

En fait, on a le résultat plus précis suivant :

Théorème 4.2.1 *Le scindage au dessus de K_B défini par 4.6 est à valeurs dans le groupe métaplectique de W .*

4.3 On garde les notations du paragraphe précédent. Soit A un réseau autodual tel que $B \subset A \subset B^*$. Pour démontrer le théorème 4.2.1, nous devons relier la réalisation S_ψ^B de la représentation métaplectique à la réalisation S_ψ^A . Commençons par donner une description de cette dernière.

Soit dw une mesure de Haar sur W et soit \mathcal{P} le projecteur orthogonal de $L^2(W, dw)$ sur \mathcal{H}_ψ^A ; en fait, on a

$$\mathcal{P}\varphi(w) = \int_A \psi\left(\frac{1}{2}\beta(a, w)\right)\varphi(w + a) da, \quad w \in W,$$

où da est la mesure de Haar normalisée sur le groupe compact A . On note L la représentation unitaire naturelle de $Sp(W)$ dans $L^2(W, dw)$ définie par $L(g)\varphi(w) = \varphi(g^{-1}w)$. Si $g \in Sp(W)$, on pose $M_A(g) = \mathcal{P} \circ L(g)|_{\mathcal{H}_\psi^A}$. On vérifie immédiatement que, pour tout $\varphi \in \mathcal{H}_\psi^A$, on a

$$(M_A(g)\varphi)(w) = [A/A \cap gA]^{-1} \sum_{a \in A/A \cap gA} \psi\left(\frac{1}{2}\beta(a, w)\right)\varphi(g^{-1}(a + w)). \quad (4.7)$$

On pose $K = K_A$. La proposition suivante rassemble les résultats de [11, Chapitre 2, II.8 et II.10, Lemme] :

Proposition 4.3.1 (i) *Pour tout $g \in Sp(W)$, il existe un nombre strictement positif $\nu_A(g)$ tel que $(g, \nu_A(g)M_A(g))$ soit un élément de $\widehat{Sp(W)}_\psi^A$.*

(ii) *Si $g \in K$, on a $\nu_A(g) = 1$ et*

$$M_A(g)\varphi(w) = \varphi(g^{-1}w), \quad \varphi \in \mathcal{H}_\psi^A, \quad w \in W.$$

(iii) *L'application $g \mapsto (g, M_A(g))$ est un homomorphisme de groupes de K dans le groupe métaplectique de W . En particulier, il existe un relèvement du groupe K dans le groupe métaplectique pour lequel la restriction de la représentation métaplectique S_ψ^A à K soit donnée par*

$$S_\psi^A(g) = M_A(g), \quad g \in K.$$

Remarques. (i) Lorsque le réseau B est autodual, l'affirmation du théorème 4.2.1 n'est autre que l'assertion (iii) de la proposition 4.3.1.

(ii) Lorsque le corps résiduel est de cardinal au moins 4, le groupe K admet un unique relèvement dans le groupe métaplectique (voir [11, Chapitre 2, II 10, Remarque]).

4.4 On garde les notations du paragraphe précédent. Dans celui-ci, nous allons donner une description plus concrète des opérateurs $M_A(g)$. Tout d'abord, si $v \in W$, on note δ_v la fonction sur W telle que

$$\delta_v(w) = \begin{cases} \psi(\frac{1}{2}\beta(v, w - v)) & \text{si } w \in v + A \\ 0 & \text{si } w \notin v + A. \end{cases} \quad (4.8)$$

Remarquons que, si $v \in W$ et $a \in A$, on a

$$\delta_{v+a} = \psi(\frac{1}{2}\beta(a, v))\delta_v. \quad (4.9)$$

De plus, si $v \in W$ et $g \in K$, on a

$$M_A(g)\delta_v = \delta_{g.v}. \quad (4.10)$$

D'autre part, il est clair que si $\Sigma \subset W$ est un système de représentants des éléments de W/A , la famille $(\delta_v)_{v \in \Sigma}$ est une base hilbertienne de l'espace \mathcal{H}_ψ^A .

On a le résultat suivant :

Lemme 4.4.1 *Soit $g \in Sp(W)$ et $v \in W$. Alors, on a*

$$M_A(g)\delta_v = [A/A \cap gA]^{-1} \sum_{a \in gA/A \cap gA} \psi(\frac{1}{2}\beta(v, g^{-1}a))\delta_{gv+a}. \quad (4.11)$$

Démonstration : Utilisant la formule 4.7, on voit que $M_A(g)\delta_v(w)$ est non nul seulement si $w \in gv + A + gA$. Par suite, il existe des nombres complexes $c(a)$, pour a parcourant un système de représentants dans gA des éléments de $(A + gA)/A = gA/A \cap gA$, tels que

$$M_A(g)\delta_v = \sum_{a \in gA/A \cap gA} c(a)\delta_{gv+a}. \quad (4.12)$$

Or, il suit des relations 4.12 et 4.7 que pour $a \in gA/A \cap gA$, on a

$$\begin{aligned} c(a) &= M_A(g)\delta_v(gv + a) \\ &= [A/A \cap gA]^{-1} \sum_{b \in A/A \cap gA} \psi(\frac{1}{2}\beta(b, gv + a))\delta_v(v + g^{-1}(a + b)). \end{aligned}$$

Or $\delta_v(v + g^{-1}(a + b))$ est non nul si et seulement si $g^{-1}(a + b) \in A$, soit encore $a + b \in gA$, soit finalement $b \in A \cap gA$. On en déduit que

$$c(a) = [A/A \cap gA]^{-1} \psi(\frac{1}{2}\beta(v, g^{-1}a))$$

comme voulu. ■

On déduit facilement du lemme 4.4.1 le résultat suivant :

Corollaire 4.4.1 *Pour tout $g \in Sp(W)$, on a*

$$\nu_A(g) = [gA/A \cap gA]^{-\frac{1}{2}}[A/A \cap gA].$$

4.5 On garde les notations des paragraphes précédents. On rappelle l'opérateur d'entrelacement $\mathcal{I}_{A,B}$ défini au paragraphe 4.1, corollaire 4.1.1, ainsi que les fonctions j et m sur le groupe $Sp(\mathfrak{b}^*)$ relative au lagrangien x et au caractère $\bar{\psi}$ définies au paragraphe 3.3, équations 3.10 et 3.11. En particulier, l'espace \mathcal{H}_ψ^B est l'espace des fonctions sur W à valeurs dans l'espace \mathcal{H}_ψ^x de la représentation ρ_ψ^x vérifiant les conditions 4.1 et 4.2.

En fait, on peut réaliser l'espace \mathcal{H}_ψ^x comme l'espace des fonctions φ sur B^* telles que

$$\varphi(b+a) = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(b,a)\right)\varphi(b), \quad b \in B^*, a \in A.$$

Dans ces conditions, on déduit facilement du lemme 3.3.1 et des formules 3.12 et 3.13 que, pour $g \in K_B$ et $\varphi \in \mathcal{H}_\psi^x$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{S}_\psi(g)\varphi(b) &= m(p_{Sp(\mathfrak{b}^*)}(g))q^{\frac{j(p_{Sp(\mathfrak{b}^*)}(g))}{2}}[A/gA \cap A]^{-1} \\ &\times \sum_{a \in A/gA \cap A} \psi\left(\frac{1}{2}\beta(a,b)\right)\varphi(g^{-1}(b+a)), \quad b \in B^*. \end{aligned} \quad (4.13)$$

On a alors le résultat suivant (comparer avec [14, 4.3.e]) :

Théorème 4.5.1 *Pour tout $g \in K_B$, on a*

$$\mathcal{I}_{A,B} \circ S_\psi^B(g) = m(p_{Sp(\mathfrak{b}^*)}(g))q^{\frac{j(p_{Sp(\mathfrak{b}^*)}(g))}{2}}M_A(g) \circ \mathcal{I}_{A,B}.$$

Démonstration : Commençons par remarquer que \mathcal{H}_ψ^B est l'espace des fonctions φ définies sur W , à valeurs dans l'espace des fonctions numériques sur B^* , qui vérifient les relations

$$\varphi(w)(a+b) = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(b,a)\right)\varphi(w)(b), \quad w \in W, b \in B^*, a \in A \quad (4.14)$$

$$\varphi(w)(b) = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(b,w)\right)\varphi(w+b)(0), \quad w \in W, b \in B^* \quad (4.15)$$

$$\int_W \sum_{B^*/A} |\varphi(w)(b)|^2 dw < +\infty. \quad (4.16)$$

En effet, la relation 4.14 dit simplement que φ est à valeurs dans l'espace \mathcal{H}_ψ^x . Notons $\tilde{\rho}_\psi^x$ la représentation de $H(B^*)$ relevant la représentation ρ_ψ^x de $H(\mathfrak{b}^*)$ via le morphisme

$p_H(b^*)$ et soit $\varphi \in \mathcal{H}_\psi^B$. Alors, il suit de la relation 4.1 satisfaite par φ que, l'on a pour $b \in B^*$ et $w \in W$

$$\begin{aligned}\varphi(w+b)(0) &= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(w,b)\right)(\tilde{\rho}_\psi^x(b)\varphi(w))(0) \\ &= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(w,b)\right)\varphi(w)(b),\end{aligned}$$

qui est la relation 4.15. Enfin, la relation 4.16 dit simplement que la fonction $w \mapsto \|\varphi(w)\|^2$ est de carré sommable sur W .

Réciproquement, supposons les relations 4.15 et 4.16 vérifiées par la fonction φ définie sur W et à valeurs dans l'espace \mathcal{H}_ψ^x . Alors, pour $w \in W$ et $b, b' \in B^*$, on a

$$\begin{aligned}(\tilde{\rho}_\psi^x(b)\varphi(w))(b') &= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(b',b)\right)\varphi(w)(b+b') \\ &= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(b',b)\right)\psi\left(\frac{1}{2}\beta(b+b',w)\right)\varphi(w+b+b')(0) \\ &= \psi\left(\frac{1}{2}(\beta(b',b) + \beta(b+b',w) + \beta(w+b,b'))\right)\varphi(w+b)(b') \\ &= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(b,w)\right)\varphi(w+b)(b')\end{aligned}$$

qui est exactement la relation 4.1. On a alors $\sum_{B^*/A} |\varphi(w)(b)|^2 = \|\varphi(w)\|^2$, $w \in W$, si bien qu'il suit de la relation 4.16 que la fonction $w \mapsto \|\varphi(w)\|^2$ est de carré sommable sur W et que φ est bien un élément de \mathcal{H}_ψ^B .

Maintenant, montrons qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{H}_\psi^B$ telle que $\varphi(0) \neq 0$. En effet, soit $\varphi \in \mathcal{H}_\psi^B$ un élément non nul : il existe $w \in W$ tel que $\varphi(w) \neq 0$. Appliquant à φ l'opérateur $\rho_\psi^B(-w)$ on se ramène au cas où $w = 0$, i.e. $\varphi(0) \neq 0$.

Soit $g \in K_B$. Comme $(g, S_\psi^B(g))$ (resp. $(g, M_A(g))$) est un élément de $\widehat{Sp(W)}_\psi^B$ (resp. $\widehat{Sp(W)}_\psi^A$), il existe un nombre complexe $\mu(g)$ tel que

$$\mathcal{I}_{A,B} \circ S_\psi^B(g) = \mu(g)M_A(g) \circ \mathcal{I}_{A,B}.$$

D'après ce qu'on a vu plus haut et compte tenu de la relation 4.5, il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{H}_\psi^B$ telle que $S_\psi^B(g)\varphi(0) \neq 0$. Alors, compte tenu de la définition de l'opérateur $\mathcal{I}_{A,B}$ (voir le corollaire 4.1.1) et des relations 4.15, 4.5 et 4.13, on a, pour tout $b \in B^*$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{A,B} \circ S_\psi^B(g)\varphi(b) &= S_\psi^B(g)\varphi(b)(0) \\
&= S_\psi^B(g)\varphi(0)(b) \\
&= \tilde{S}_\psi(g)(\varphi(0))(b) \\
&= m(p_{Sp(b^*)}(g))q^{\frac{j(p_{Sp(b^*)}(g))}{2}}[A/gA \cap A]^{-1} \\
&\quad \times \sum_{a \in A/gA \cap A} \psi\left(\frac{1}{2}\beta(a,b)\right)\varphi(0)(g^{-1}(b+a)) \\
&= m(p_{Sp(b^*)}(g))q^{\frac{j(p_{Sp(b^*)}(g))}{2}}[A/gA \cap A]^{-1} \\
&\quad \times \sum_{a \in A/gA \cap A} \psi\left(\frac{1}{2}\beta(a,b)\right)\varphi(g^{-1}(b+a))(0).
\end{aligned}$$

D'autre part, il suit de la formule 4.7 donnant l'expression de l'opérateur $M_A(g)$, $g \in Sp(W)$, que, pour tout $b \in B^*$,

$$\begin{aligned}
M_A(g) \circ \mathcal{I}_{A,B}\varphi(b) &= [A/gA \cap A]^{-1} \sum_{a \in A/gA \cap A} \psi\left(\frac{1}{2}\beta(a,b)\right)\mathcal{I}_{A,B}\varphi(g^{-1}(b+a)) \\
&= [A/gA \cap A]^{-1} \sum_{a \in A/gA \cap A} \psi\left(\frac{1}{2}\beta(a,b)\right)\varphi(g^{-1}(b+a))(0),
\end{aligned}$$

d'où le théorème. ■

Pour $g \in K_B$, on définit l'opérateur $S_\psi^A(g)$ dans l'espace \mathcal{H}_ψ^A en posant

$$S_\psi^A(g) = m(p_{Sp(b^*)}(g))q^{\frac{j(p_{Sp(b^*)}(g))}{2}}M_A(g) \quad (4.17)$$

Il est clair d'après le théorème 4.5.1 et le lemme 4.2.1 que l'application $g \mapsto (g, S_\psi^A(g))$ est un homomorphisme de groupes de K_B dans $\widehat{Sp(W)}_\psi^A$, scindant la suite exacte 3.6.

Rappelons que P_B est le stabilisateur du lagrangien x pour l'action de K_B dans le \mathbb{F}_q -espace symplectique b^* . On désigne par ζ le caractère de P_B tel que

$$\zeta(p) = \left(\frac{\det_x p_{Sp(b^*)}(p)}{q} \right), \quad (4.18)$$

où $\left(\frac{a}{q}\right)$ désigne le symbole de Legendre relatif au corps \mathbb{F}_q : pour tout $a \in \mathbb{F}_q^\times$

$$\left(\frac{a}{q}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in (\mathbb{F}_q^\times)^2 \\ -1 & \text{si } a \notin (\mathbb{F}_q^\times)^2. \end{cases} \quad (4.19)$$

On se donne une base autoduale $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r)$ de W telle que $B = \varpi \mathcal{O}e_1 \oplus \dots \oplus \varpi \mathcal{O}e_l \oplus \mathcal{O}e_{l+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}e_r \oplus \mathcal{O}f_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}f_r$ et $A = \mathcal{O}e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}e_r \oplus \mathcal{O}f_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}f_r$

et on reprend les notations des paragraphes 2.6 et 3.3. En particulier, à partir d'ici ω désigne l'indice de Weil relatif au caractère $\frac{1}{2}\overline{\psi}$ du corps \mathbb{F}_q . On a alors le résultat suivant :

Corollaire 4.5.1 *La représentation S_ψ^A de K_B vérifie les relations suivantes qui la déterminent entièrement :*

$$S_\psi^A(p) = \zeta(p)M_A(p), \quad p \in P_B \quad (4.20)$$

$$S_\psi^A(\varsigma_B) = \left(\frac{-1}{q}\right)^l \omega(1)^{-l} q^{\frac{l}{2}} M_A(\varsigma_B). \quad (4.21)$$

Démonstration : Remarquons tout d'abord que $j(p_{Sp(b^*)}(p)) = 0$, $p \in P_B$, tandis que, avec les notations du paragraphe 3.3, $p_{Sp(b^*)}(\varsigma_B) = J_{b^*} = -\tau_{\{1, \dots, l\}}$ et $j(p_{Sp(b^*)}(\varsigma_B)) = j(J_{b^*}) = l$. Il suit alors de la définition de la représentation S_ψ^A de K_B et des propriétés de la fonction θ énoncées au paragraphe 3.3

$$S_\psi^A(p) = \omega(\det_x(p_{Sp(b^*)}(p)))^{-1} \omega(1) M_A(p), \quad p \in P_B$$

$$S_\psi^A(\varsigma_B) = \left(\frac{-1}{q}\right)^l \omega(1)^{-l} q^{\frac{l}{2}} M_A(\varsigma_B)$$

Or, d'après [17, Proposition A.9 (1)], on a $\omega(a)^{-1} \omega(1) = \left(\frac{a}{q}\right)$, pour $a \in \mathbb{F}_q$. Les formules 4.20 et 4.21 résultent de ces considérations. Le lemme 2.6.1 entraîne que ces formules déterminent entièrement la représentation S_ψ^A de K_B . ■

4.6 On garde les notations du paragraphe précédent. Il suit du théorème 4.5.1 que démontrer le théorème 4.2.1 revient à démontrer le

Théorème 4.6.1 *L'application $s_B : g \mapsto (g, S_\psi^A(g))$ est un homomorphisme de groupes de K_B dans le groupe métaplectique de W .*

Démonstration : Selon le corollaire 2.6.1, le groupe K_B est engendré par P_B et \overline{N}_B . Or, il suit de la proposition 4.3.1 et du corollaire 4.5.1 que, pour tout $p \in P_B$, $s_B(p)$ est un élément de $Mp(W)$. Il nous reste à démontrer que, pour tout $n \in \overline{N}_B$, $s_B(n) \in Mp(W)$.

On a $W = X \oplus Y$ où X (resp. Y) désigne le sous-espace lagrangien de W engendré par les vecteurs e_1, \dots, e_r (resp. f_1, \dots, f_r). Par suite, l'application $\varphi \mapsto \varphi|_X$ permet d'identifier l'espace \mathcal{H}_ψ^Y de la représentation ρ_ψ^Y avec $L^2(X, dx)$ et l'opérateur $\mathcal{I}_{Y,A} : \mathcal{H}_\psi^A \rightarrow \mathcal{H}_\psi^Y = L^2(X, dx)$ entreliant les représentations ρ_ψ^A et ρ_ψ^Y est donné par

$$\mathcal{I}_{Y,A}\varphi(x) = \int_{Y/A \cap Y} \psi\left(\frac{1}{2}\beta(y, x)\right) \varphi(x+y) d\dot{y}, \quad \varphi \in \mathcal{H}_\psi^A, \quad x \in X. \quad (4.22)$$

Il est immédiat que 1_A , la fonction caractéristique du réseau A , est un élément de \mathcal{H}_ψ^A . De plus, comme $A = A \cap X \oplus A \cap Y$, on a $\mathcal{I}_{Y,A}1_A = 1_{A \cap X}$, où $1_{A \cap X}$ est la fonction caractéristique du réseau $A \cap X$ de X .

Comme \overline{N}_B est un sous-groupe du radical unipotent N_Y du stabilisateur de Y dans $Sp(W)$, lequel se relève de manière unique en un sous-groupe du groupe métaplectique (voir le paragraphe 3.6), pour établir notre résultat, il suffit de montrer que pour tout $n \in \overline{N}_B$, on a

$$\mathcal{I}_{Y,A} \circ S_\psi^A(n) = S_\psi^Y(n) \circ \mathcal{I}_{Y,A}. \quad (4.23)$$

Or, il est clair que les deux membres de l'équation 4.23 diffèrent d'un facteur scalaire. Il suffit donc de montrer que pour tout $n \in \overline{N}_B$, on a

$$\mathcal{I}_{Y,A} \circ S_\psi^A(n)1_A = S_\psi^Y(n)1_{A \cap X}. \quad (4.24)$$

Mais, tout élément de \overline{N}_B est de la forme $y_B(a)$ avec $a \in \mathcal{M}_l(\mathcal{O})$ une matrice symétrique. Soit donc a une telle matrice. Pour ce qui est du membre de droite de 4.24, il résulte du lemme 3.6.1 que l'on a

$$S_\psi^Y(y_B(a))1_{A \cap X}(x) = \psi\left(-\frac{\varpi^{\lambda_\psi-1}}{2} {}^t x a x\right)1_{A \cap X}(x), \quad x \in X. \quad (4.25)$$

Explicitons le membre de gauche de 4.24. Remarquons tout d'abord que $y_B(a) = \varsigma_B x_B(-a) \varsigma_B^{-1}$ de sorte que

$$S_\psi^A(y_B(a)) = S_\psi^A(\varsigma_B) S_\psi^A(x_B(-a)) S_\psi^A(\varsigma_B^{-1}).$$

Or $\varsigma_B^4 = Id$, $\varsigma_B^2 \in P_B$ et $\zeta(\varsigma_B^2) = \left(\frac{-1}{q}\right)^l$. On en déduit que

$$S_\psi^A(y_B(a))1_A = \left(\frac{-1}{q}\right)^l S_\psi^A(\varsigma_B) S_\psi^A(x_B(-a)) S_\psi^A(\varsigma_B)1_A \quad (4.26)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \varsigma_B A &= \varpi \mathcal{O}e_1 \oplus \cdots \oplus \varpi \mathcal{O}e_l \oplus \mathcal{O}e_{l+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}e_r \\ &\quad \oplus \varpi^{-1} \mathcal{O}f_1 \oplus \cdots \oplus \varpi^{-1} \mathcal{O}f_l \oplus \mathcal{O}f_{l+1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}f_r \end{aligned}$$

de sorte que,

$$\varsigma_B A / A \cap \varsigma_B A = \mathbb{F}_q^l.$$

Si $u \in \mathcal{O}^l$, on désigne par \dot{u} son image dans \mathbb{F}_q^l et on pose $u.e = u_1 e_1 + \cdots + u_l e_l$ et $u.f = u_1 f_1 + \cdots + u_l f_l$.

Comme $1_A = \delta_0$, il suit du corollaire 4.5.1 et du lemme 4.4.1 que l'on a

$$S_\psi^A(\varsigma_B)1_A = q^{-\frac{l}{2}} \left(\frac{-1}{q}\right)^l \omega(1)^{-l} \sum_{\dot{u} \in \mathbb{F}_q^l} \delta_{\varpi^{-1}u.f}. \quad (4.27)$$

Or, si $u \in \mathcal{O}^l$, il résulte du corollaire 4.5.1, de la proposition 4.3.1, du lemme 4.4.1 et de la relation 4.9 que l'on a

$$\begin{aligned}
S_\psi^A(x_B(-a))\delta_{\varpi^{-1}u.f} &= \delta_{x_B(-a)\varpi^{-1}u.f} \\
&= \delta_{-au.e+\varpi^{-1}u.f} \\
&= \psi\left(-\frac{1}{2}\beta(au.e, \varpi^{-1}u.f)\right)\delta_{\varpi^{-1}u.f} \\
&= \psi\left(-\frac{\varpi^{\lambda_\psi-1}}{2}{}^t uau\right)\delta_{\varpi^{-1}u.f}.
\end{aligned}$$

Compte tenu de 4.27, il vient

$$S_\psi^A(x_B(-a))S_\psi^A(\varsigma_B)1_A = q^{-\frac{l}{2}} \left(\frac{-1}{q}\right)^l \omega(1)^{-l} \sum_{\dot{u} \in \mathbb{F}_q^l} \psi\left(-\frac{\varpi^{\lambda_\psi-1}}{2}{}^t uau\right)\delta_{\varpi^{-1}u.f}.$$

Utilisant à nouveau le corollaire 4.5.1, le lemme 4.4.1, la formule 4.9, et compte tenu de 4.26 et de la relation $\left(\frac{-1}{q}\right) = \omega(1)^2$ (voir [17, Proposition A.9 (1) et Theorem A.2 (2)]), on obtient

$$\begin{aligned}
S_\psi^A(y_B(a))1_A &= \left(\frac{-1}{q}\right)^l \omega(1)^{-2l} q^{-l} \sum_{\dot{u}, \dot{v} \in \mathbb{F}_q^l} \psi\left(-\frac{\varpi^{\lambda_\psi-1}}{2}{}^t uau\right) \\
&\quad \times \psi\left(\frac{1}{2}\beta(\varpi^{-1}u.f, -v.e)\right)\delta_{u.e+\varpi^{-1}v.f} \\
&= q^{-l} \sum_{\dot{v} \in \mathbb{F}_q^l} \left(\sum_{\dot{u} \in \mathbb{F}_q^l} \left(\psi\left(-\frac{\varpi^{\lambda_\psi-1}}{2}{}^t uau\right) \psi(\varpi^{\lambda_\psi-1}{}^t uv) \right) \right) \delta_{\varpi^{-1}v.f}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Maintenant, nous allons calculer l'action de l'opérateur d'entrelacement $\mathcal{I}_{Y,A}$ sur les fonctions δ_v , $v \in W$. Soit $v \in W$. Écrivons $v = v_X + v_Y$ avec $v_X \in X$ et $v_Y \in Y$. Utilisant la formule 4.22 on voit que, si $x \notin v_X + A \cap X$, on a

$$\mathcal{I}_{Y,A}\delta_v(x) = 0$$

et, si $x \in v_X + A \cap X$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{Y,A}\delta_v(x) &= \delta_v(x + v_Y)\psi\left(\frac{1}{2}\beta(v_Y, x)\right) \\
&= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(v, x - v_X)\right)\psi\left(\frac{1}{2}\beta(v_Y, x)\right) \\
&= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(v_X, v_Y)\right)\psi(\beta(v_Y, x)).
\end{aligned}$$

On voit donc que, si $v \in \mathcal{O}^l$, on a

$$\mathcal{I}_{Y,A}\delta_{\varpi^{-1}v.f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \cap X \\ \psi(-\varpi^{\lambda_\psi-1}{}^t vx) & \text{si } x \in A \cap X. \end{cases} \tag{4.29}$$

Compte tenu de la relation 4.28, il vient, pour $x \notin A \cap X$,

$$\mathcal{I}_{Y,A} S_\psi^A(y_B(a)) 1_A(x) = 0$$

et, pour $x \in A \cap X$,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{Y,A} S_\psi^A(y_B(a)) 1_A(x) &= q^{-l} \sum_{\dot{u} \in \mathbb{F}_q^l} \psi\left(-\frac{\varpi^{\lambda_\psi-1}}{2} {}^t u a u\right) \sum_{\dot{v} \in \mathbb{F}_q^l} \psi(\varpi^{\lambda_\psi-1} {}^t v (u - x)) \\ &= \psi\left(-\frac{\varpi^{\lambda_\psi-1}}{2} {}^t x a x\right) \end{aligned}$$

Comparant avec 4.25, on voit que la relation 4.24 est vraie. Ceci achève la démonstration du théorème. \blacksquare

Remarque. (i) En utilisant les résultats de [1] et [2] et en raisonnant comme dans la démonstration de [12, Lemma 11.1], on peut montrer que, si $q \geq 4$, le groupe K_B est parfait, i.e. égal à son sous-groupe des commutateurs. Il s'ensuit que, dans ce cas, la suite exacte 3.6 admet un unique scindage au dessus de K_B , lequel est à valeurs dans $Mp(W)$.

(ii) Désormais, nous utilisons la section s_B pour identifier K_B avec un sous-groupe de $Mp(W)$. Elle est caractérisée par le fait que la représentation $S_\psi^A \circ s_B$ de K_B est donnée par la formule 4.17. Avec cette convention, la restriction de la représentation métaplectique S_ψ^A à K_B est entièrement déterminée par les formules 4.20 et 4.21.

4.7 On se donne une décomposition $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ de W en somme directe orthogonale de sous-espaces symplectiques tous non nuls.

Les groupes de Heisenberg $H(W_i)$, $1 \leq i \leq n$ sont des sous-groupes qui commutent deux à deux du groupe $H(W)$ et l'application $(h_1, \dots, h_n) \mapsto h_1 \cdots h_n$ est un morphisme surjectif du produit direct $H(W_1) \times \cdots \times H(W_n)$ sur $H(W)$.

Pour $1 \leq i \leq n$, soit A_i un réseau autodual de W_i . Alors $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ est un réseau autodual de W . Pour $1 \leq i \leq n$, soit $\varphi_i \in \mathcal{H}_\psi^{A_i}$. Alors la fonction $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ définie sur W par la relation

$$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n(w_1 + \cdots + w_n) = \varphi_1(w_1) \cdots \varphi_n(w_n), \quad w_i \in W_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.30)$$

est un élément de \mathcal{H}_ψ^A . De plus, l'application $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \mapsto \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ induit un isomorphisme d'espaces de Hilbert \mathcal{I}_A du produit tensoriel hilbertien $\mathcal{H}_\psi^{A_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \mathcal{H}_\psi^{A_n}$ sur \mathcal{H}_ψ^A .

Le lemme suivant est bien connu et en tout cas immédiat à démontrer.

Lemme 4.7.1 *La représentation $\rho_\psi^{A_1} \otimes \cdots \otimes \rho_\psi^{A_n}$ du produit direct $H(W_1) \times \cdots \times$*

$H(W_n)$ passe au quotient en une représentation de $H(W)$. De plus \mathcal{I}_A entrelace les représentations $\rho_\psi^{A_1} \otimes \cdots \otimes \rho_\psi^{A_n}$ et ρ_ψ^A de $H(W)$.

Soit $1 \leq i \leq n$. On désigne par γ_i l'injection naturelle de $Sp(W_i)$ dans $Sp(W)$: si $x \in Sp(W_i)$, $\gamma_i(x)$ laisse stable W_i en y agissant comme x , et opère trivialement sur W_i^\perp . Alors γ_i se relève de manière unique en un homomorphisme injectif noté $\tilde{\gamma}_i$ de $Mp(W_i)$ dans $Mp(W)$. On identifie $Sp(W_i)$ (resp. $Mp(W_i)$) avec son image dans $Sp(W)$ (resp. $Mp(W)$) par γ_i (resp. $\tilde{\gamma}_i$). Les sous-groupes $Sp(W_i)$ (resp. $Mp(W_i)$), $1 \leq i \leq n$ de $Sp(W)$ (resp. $Mp(W)$) commutent deux à deux. On désigne par $Sp(W_1) \cdots Sp(W_n)$ (resp. $Mp(W_1) \cdots Mp(W_n)$) leur produit dans $Sp(W)$ (resp. $Mp(W)$), qui n'est autre que le sous-groupe qu'ils engendrent. Evidemment, la multiplication induit un isomorphisme (resp. morphisme surjectif) du produit direct $Sp(W_1) \times \cdots \times Sp(W_n)$ (resp. $Mp(W_1) \times \cdots \times Mp(W_n)$) sur $Sp(W_1) \cdots Sp(W_n)$ (resp. $Mp(W_1) \cdots Mp(W_n)$).

Lemme 4.7.2 *La représentation $S_\psi^{A_1} \otimes \cdots \otimes S_\psi^{A_n}$ du produit direct $Mp(W_1) \times \cdots \times Mp(W_n)$ passe au quotient en une représentation du sous-groupe $Mp(W_1) \cdots Mp(W_n)$ de $Mp(W)$ notée de même. De plus \mathcal{I}_A entrelace les représentations $S_\psi^{A_1} \otimes \cdots \otimes S_\psi^{A_n}$ et $(S_\psi^A)_{|Mp(W_1) \cdots Mp(W_n)}$.*

Démonstration : Le premier point est immédiat. Le deuxième point est une conséquence facile du lemme 4.7.1 et du fait que les groupes $Mp(W_i)$ sont parfaits. ■

Maintenant, pour $1 \leq i \leq n$, on se donne un bon réseau B_i de W_i . Alors $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ est un bon réseau de W . On peut considérer les groupes K_{B_i} , $1 \leq i \leq n$ comme des sous-groupes de $Sp(W)$ et comme ils commutent deux à deux former leur produit $K_{B_1} \cdots K_{B_n}$, qui est clairement un sous-groupe de K_B . Pour $1 \leq i \leq n$, on considère s_{B_i} comme une section de K_{B_i} à valeurs dans le sous-groupe $Mp(W_i)$ de $Mp(W)$.

Proposition 4.7.1 *On a l'égalité des sections s_B et $s_{B_1} \cdots s_{B_n}$ au dessus du sous-groupe $K_{B_1} \cdots K_{B_n}$.*

Démonstration : Pour $1 \leq i \leq n$, soit A_i un réseau autodual de W_i vérifiant $B_i \subset A_i \subset B_i^*$. Alors $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ est un réseau autodual de W vérifiant $B \subset A \subset B^*$. Il suffit alors de démontrer que l'opérateur \mathcal{I}_A du lemme 4.7.1 entrelace les deux représentations $(S_\psi^{A_1} \circ s_{B_1}) \otimes \cdots \otimes (S_\psi^{A_n} \circ s_{B_n})$ et $(S_\psi^A \circ s_B)_{|K_{B_1} \cdots K_{B_n}}$ de $K_{B_1} \cdots K_{B_n}$. Ceci se vérifie par un calcul direct à partir de la formule 4.17 qui décrit explicitement la représentation $S_\psi^A \circ s_B$. ■

5 Restriction de la représentation de Weil à un sous-groupe compact maximal.

Soit B un bon réseau et $l = l(B)$. Dans cette section, nous déterminons la décomposition en composantes irréductibles de la restriction de la représentation métaplectique à K_B . On reprend les notations de la section précédente.

5.1 Soit A un réseau autodual tel que $\varpi B^* \subset B \subset A \subset B^*$. On réalise la restriction de la représentation métaplectique, notée S_ψ^A , à K_B dans l'espace \mathcal{H}_ψ^A par les formules 4.20 et 4.21 du corollaire 4.5.1.

Si \mathcal{E} est un sous-espace de \mathcal{H}_ψ^A , on désigne par \mathcal{E}^+ (resp. \mathcal{E}^-) le sous-espace de \mathcal{E} constitué des fonctions paires (resp. impaires). On sait que les sous-espaces $\mathcal{H}_\psi^{A,\pm}$ sont invariants et irréductibles sous l'action de la représentation S_ψ^A de $Mp(W)$.

On considère les sous-espaces suivants de \mathcal{H}_ψ^A :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{0,0}^B &= \mathbb{C}\delta_0 \\ \mathcal{E}_{n,0}^B &= \{f \in \mathcal{H}_\psi^A \mid \text{Supp } f \subset \varpi^{-n}A \setminus \varpi^{-n}B\}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \\ \mathcal{E}_{n,2}^B &= \{f \in \mathcal{H}_\psi^A \mid \text{Supp } f \subset \varpi^{-n}B^* \setminus \varpi^{-n}A\}, n \in \mathbb{N} \\ \mathcal{E}_{n,1}^B &= \{f \in \mathcal{H}_\psi^A \mid \text{Supp } f \subset \varpi^{-(n+1)}B \setminus \varpi^{-n}B^*\}, n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit K_n le sous-groupe des éléments $g \in K = K_A$ tels que $(g-1)A \subset \varpi^n A$. Alors, on a $K_0 = K$ et, pour $n \geq 1$, $K_n \subset P_B$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Alors le groupe quotient $\varpi^{-n}A/A$ est naturellement muni d'une structure de O_{n-1} -module symplectique pour la forme bilinéaire alternée β_n définie par

$$\beta_n(v + A, w + A) = \varpi^{-\lambda_\psi + 2n} \beta(v, w) + \varpi^n \mathcal{O}, v, w \in \varpi^{-n}A.$$

Il est isomorphe, via l'application $v + A \mapsto p_{a_n}(\varpi^n v)$, au O_{n-1} -module symplectique $a_n = A/\varpi^n A$, défini au paragraphe 2.5. Le groupe K agit naturellement dans $\varpi^{-n}A/A = a_n$ et cette action induit un morphisme surjectif de groupes de K sur le groupe symplectique $Sp(a_n)$ dont le noyau est K_n .

Soit $v \in \varpi^{-n}A \setminus \varpi^{-n+1}A$. On désigne par $P_{B,v}$ le stabilisateur dans le groupe P_B de $v + A \in \varpi^{-n}A/A$ et par $\tilde{P}_{B,v}$ le sous-groupe $\{\pm Id\}P_{B,v}$ de P_B . Il est clair que K_n est un sous-groupe de $P_{B,v}$. Il résulte de 4.9 et 4.10 que la fonction $\chi_{B,v}$ définie sur $P_{B,v}$ en posant

$$\chi_{B,v}(g) = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(gv, v)\right), g \in P_{B,v},$$

est un caractère et que l'on a

$$M_A(g)\delta_v = \chi_{B,v}(g)\delta_v, g \in P_{B,v}.$$

Le caractère $\chi_{B,v}$ de $P_{B,v}$ s'étend en les deux seuls caractères $\chi_{B,v}^\pm$ de $\tilde{P}_{B,v}$ tels que $\chi_{B,v}^\pm(-Id) = \pm 1$. Enfin, on désigne par χ_v la restriction du caractère $\chi_{B,v}$ à K_n .

Lemme 5.1.1 *Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.*

(i) *Soit $v, v' \in \varpi^{-n}A \setminus \varpi^{-n+1}A$. Alors, on a $\chi_v = \chi_{v'}$ si et seulement si $v' \in \pm v + A$.*

(ii) *On a*

$$K_{2n} \subset \bigcap_{v \in C} \ker \chi_v \subsetneq K_{2n-2}$$

où C désigne $\varpi^{-n+1}B^* \setminus \varpi^{-n+1}A$, $\varpi^{-n}A \setminus \varpi^{-n}B$ ou $\varpi^{-n}B \setminus \varpi^{-n+1}B^*$.

Démonstration : On se donne une base autoduale $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r)$ de W telle que $A = \mathcal{O}e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}e_r \oplus \mathcal{O}f_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}f_r$ et $B = \varpi\mathcal{O}e_1 \oplus \dots \oplus \varpi\mathcal{O}e_l \oplus \mathcal{O}e_{l+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}e_r \oplus \mathcal{O}f_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}f_r$. On identifie les éléments (resp. les endomorphismes) de W avec le vecteur colonne de leurs coordonnées (resp. leur matrice) dans cette base. Si λ est un élément de k^r , on pose $\|\lambda\|_p = \max\{|\lambda_i|_p \mid 1 \leq i \leq r\}$, où $|\cdot|_p$ désigne la valeur absolue normalisée sur le corps k .

Alors, les éléments de K_n sont ceux de $Sp(W)$ s'écrivant $\begin{pmatrix} Id + \varpi^n u & \varpi^n x \\ \varpi^n y & Id + \varpi^n z \end{pmatrix}$ avec u, x, y, z des matrices d'ordre r à coefficients dans \mathcal{O} et vérifiant

$$\begin{aligned} {}^t x - x + \varpi^n({}^t x z - {}^t z x) &= 0 \\ y - {}^t y + \varpi^n({}^t u y - {}^t y u) &= 0 \\ z + {}^t u + \varpi^n({}^t u z - {}^t y x) &= 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

De même, les éléments de $\varpi^{-n}A \setminus \varpi^{-n+1}A$ sont ceux de W s'écrivant $\varpi^{-n} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ avec $\lambda, \mu \in k^r$ tels $\max\{\|\lambda\|_p, \|\mu\|_p\} = 1$.

(i) Un calcul immédiat montre que si $v = \varpi^{-n} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ est un élément de $\varpi^{-n}A \setminus \varpi^{-n+1}A$ et $g = \begin{pmatrix} Id + \varpi^n u & \varpi^n x \\ \varpi^n y & Id + \varpi^n z \end{pmatrix}$ est un élément de K_n , on a

$$\chi_v(g) = \psi\left(\frac{1}{2}\varpi^{\lambda_\psi - n}({}^t \lambda {}^t y \lambda + {}^t \lambda ({}^t u - z)\mu + {}^t \mu x \mu)\right). \tag{5.2}$$

On en déduit facilement que si $v = \varpi^{-n} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ et $v' = \varpi^{-n} \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix}$ sont deux éléments de $\varpi^{-n}A \setminus \varpi^{-n+1}A$, on a $\chi_v = \chi_{v'}$, si et seulement si pour toute paire (x, z) de matrices à coefficients dans \mathcal{O} avec x symétrique, on a

$$\begin{aligned} {}^t \lambda {}^t x \lambda - {}^t \lambda' {}^t x \lambda' &\in \varpi^n \mathcal{O} \\ {}^t \mu x \mu - {}^t \mu' x \mu' &\in \varpi^n \mathcal{O} \\ {}^t \lambda z \mu - {}^t \lambda' z \mu' &\in \varpi^n \mathcal{O}. \end{aligned}$$

L'assertion (i) du lemme en découle.

(ii) Il est immédiat que si $v \in \varpi^{-n}A \setminus \varpi^{-n+1}A$, $K_{2n} \subset \ker \chi_v$. Ceci montre la première inclusion de l'assertion (ii).

Soit $m \leq s$ deux entiers naturels. Dans la suite, on écrit les vecteurs colonnes $\lambda \in k^s$ (resp. les matrices $a \in \mathcal{M}_s(k)$) sous la forme $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ (resp. $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$) avec $\lambda_1 \in k^m$ et $\lambda_2 \in k^{s-m}$ (resp. $a_{11} \in \mathcal{M}_m(k)$, $a_{12} \in \mathcal{M}_{m,s-m}(k)$, $a_{21} \in \mathcal{M}_{s-m,m}(k)$ et $a_{22} \in \mathcal{M}_{s-m}(k)$). L'assertion suivante est immédiate : on suppose que la matrice $a \in \mathcal{M}_s(\mathcal{O})$ est telle que

$${}^t a - a \in \varpi^n \mathcal{M}_s(\mathcal{O}) \quad (5.3)$$

et que la forme quadratique $Q_a(\lambda) = {}^t \lambda a \lambda$ vérifie

$$Q_a(\lambda) \in \varpi^n \mathcal{O}, \text{ pour tout } \lambda \in \mathcal{O}^s \text{ tel que } \|\lambda_1\|_p = 1 \text{ et } \|\lambda_2\|_p < 1. \quad (5.4)$$

Alors, on a $a \in \varpi^{n-2} \mathcal{M}_s(\mathcal{O})$ et $a_{11} \in \varpi^n \mathcal{M}_m(\mathcal{O})$.

Soit $g = \begin{pmatrix} Id + \varpi^n u & \varpi^n x \\ \varpi^n y & Id + \varpi^n z \end{pmatrix} \in K_n$. D'après la formule 5.2, si $v = \varpi^{-n} \lambda \in \varpi^{-n}A \setminus \varpi^{-n+1}A$, on a

$$\chi_v(g) = \psi\left(\frac{1}{2} \varpi^{\lambda_\psi - n} Q_a(\lambda)\right)$$

avec $a = \begin{pmatrix} {}^t y & -z \\ u & x \end{pmatrix}$. Il suit des relations 5.1 que a est telle que ${}^t a - a \in \varpi^n \mathcal{M}_{2r}(\mathcal{O})$.

D'autre part, si C est comme dans l'assertion (ii) du lemme, on a $\varpi^n C = \varpi B^* \setminus \varpi A$, $A \setminus B$ ou $B \setminus \varpi B^*$. Si $\lambda \in k^r$ est un vecteur colonne, on écrit $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ où $\lambda_1 \in k^l$ et $\lambda_2 \in k^{r-l}$. Avec ces notations, on a $A \setminus B = \{v = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in A \mid \lambda, \mu \in k^r, \|\lambda_1\|_p = 1\}$, $B \setminus \varpi B^* = \{v = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in A \mid \lambda, \mu \in k^r, \|\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}\|_p = 1, \|\lambda_1\|_p < 1\}$ et $B^* \setminus A = \varpi^{-1} \{v = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \in W \mid \lambda, \mu \in k^r, \|v\|_p = 1, \|\begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}\|_p < 1, \|\lambda_1\|_p < 1\}$

Alors, si C est comme dans l'assertion (ii) du lemme, quitte à effectuer une permutation sur les coordonnées dans k^{2r} et pour un bon choix de l'entier $m \leq 2r$, la condition $g \in \cap_{v \in C} \ker \chi_v$ implique la condition 5.4. Il résulte alors de notre assertion, que $a \in \varpi^{n-2} \mathcal{M}_{2r}(\mathcal{O})$ et a_{11} est à coefficients dans $\varpi^n \mathcal{O}$. On en déduit que $\cap_{v \in C} \ker \chi_v \subsetneq K_{2n-2}$. ■

Soit donc $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $v \in \varpi^{-n}A \setminus \varpi^{-n+1}A$. Il suit du lemme 5.1.1 (i) que $\tilde{P}_{B,v}$ est le stabilisateur dans P_B du caractère χ_v du sous-groupe distingué K_n . La méthode des petits groupes de Mackey montre alors que la représentation $\text{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B} \chi_{B,v}^\pm$ est irréductible. On en désigne par $\mathcal{E}_{v,\pm}$ l'espace.

On rappelle le caractère ζ de P_B défini par les formules 4.18 et 4.19. Pour $v \in W$, on désigne par $\zeta \chi_{B,v}^\pm$ le caractère de $\tilde{P}_{B,v}$ produit de $\chi_{B,v}^\pm$ par $\zeta|_{\tilde{P}_{B,v}}$.

Lemme 5.1.2 (i) *L'espace de Hilbert \mathcal{H}_ψ^A est somme hilbertienne des sous-espaces $\mathcal{E}_{n,j}^B$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, 2$. Le sous-espace $\mathcal{E}_{0,0}^B$ est non nul. Les sous-espaces $\mathcal{E}_{n,0}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,*

et $\mathcal{E}_{n,2}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, sont non nuls si et seulement si $l > 0$. Les espaces $\mathcal{E}_{n,1}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$ sont non nuls si et seulement si $l < r$.

(ii) Lorsqu'ils sont non nuls, les sous-espaces $\mathcal{E}_{0,0}^B$, $\mathcal{E}_{n,0}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et $\mathcal{E}_{n,j}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$ sont invariants et irréductibles sous la restriction de la représentation M_A de K à P_B . On note $M_{0,0}^B$, $M_{n,0}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $M_{n,j}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$ les représentations de P_B ainsi obtenues. Elles sont deux à deux non équivalentes et monomiales. De plus, $M_{0,0}^B$ est la représentation triviale et l'on a :

$$\begin{aligned} M_{n,0}^{B,\pm} &= \text{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B} \chi_{B,v}^{\pm}, v \in \varpi^{-n}A \setminus \varpi^{-n}B, n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \\ M_{n,2}^{B,\pm} &= \text{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B} \chi_{B,v}^{\pm}, v \in \varpi^{-n}B^* \setminus \varpi^{-n}A, n \in \mathbb{N} \\ M_{n,1}^{B,\pm} &= \text{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B} \chi_{B,v}^{\pm}, v \in \varpi^{-(n+1)}B \setminus \varpi^{-n}B^*, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(iii) Lorsqu'ils sont non nuls, les sous-espaces $\mathcal{E}_{0,0}^B$, $\mathcal{E}_{n,0}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et $\mathcal{E}_{n,j}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$ sont invariants et irréductibles sous la restriction de la représentation métaplectique S_ψ^A à P_B . On note $S_{0,0}^B$, $S_{n,0}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $S_{n,j}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$ les représentations de P_B ainsi obtenues. Elles sont deux à deux non équivalentes et l'on a :

$$\begin{aligned} S_{0,0}^B &= \zeta \\ S_{n,0}^{B,\pm} &= \text{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B} \zeta \chi_{B,v}^{\pm}, v \in \varpi^{-n}A \setminus \varpi^{-n}B, n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \\ S_{n,2}^{B,\pm} &= \text{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B} \zeta \chi_{B,v}^{\pm}, v \in \varpi^{-n}B^* \setminus \varpi^{-n}A, n \in \mathbb{N} \\ S_{n,1}^{B,\pm} &= \text{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B} \zeta \chi_{B,v}^{\pm}, v \in \varpi^{-(n+1)}B \setminus \varpi^{-n}B^*, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Démonstration : (i) Compte tenu des inclusions $\varpi B^* \subset B \subset A \subset B^*$, il est clair que \mathcal{H}_ψ^A est somme hilbertienne des sous-espaces $\mathcal{E}_{n,j}^B$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, 2$. De plus, ces inclusions sont strictes si $0 < l < r$ tandis que $\varpi B^* \subsetneq B = A = B^*$, si $l = 0$, et $\varpi B^* = B \subsetneq A \subsetneq B^*$, si $l = r$.

(ii) Le fait que les sous-espaces $\mathcal{E}_{0,0}^B$, $\mathcal{E}_{n,0}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et $\mathcal{E}_{n,j}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$, sont invariants résulte simplement de l'invariance des réseaux A , B et B^* sous l'action de P_B .

Il est clair que l'action de P_B dans $\mathcal{E}_{0,0}^B$ est triviale. D'autre part, d'après le lemme 2.7.1, les orbites de P_B dans $B^* \setminus \varpi B^*$ sont $B^* \setminus A$, $A \setminus B$ et $B \setminus \varpi B^*$. On déduit de ceci que, pour $v \in \varpi^{-n}A \setminus \varpi^{-n}B$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, (resp. $v \in \varpi^{-n}B^* \setminus \varpi^{-n}A$ et $n \in \mathbb{N}$, $v \in \varpi^{-(n+1)}B \setminus \varpi^{-n}B^*$ et $n \in \mathbb{N}$), l'application $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ définie par $\tilde{\varphi}(p) = \varphi(p^{-1}v)$ induit une bijection de l'espace $\mathcal{E}_{n,0}^{B,\pm}$ (resp. $\mathcal{E}_{n,2}^{B,\pm}$, $\mathcal{E}_{n,1}^{B,\pm}$) sur l'espace $\mathcal{E}_{v,\pm}$ qui entrelace la restriction de M_A à P_B et la représentation $\text{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B} \chi_{B,v}^{\pm}$.

Soit $n \geq 1$ et $v \in \varpi^{-n}A \setminus \varpi^{-n+1}A$. Il suit de l'assertion (ii) du lemme 5.1.1 que le noyau de la représentation $\text{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B} \chi_{B,v}^\pm$ contient K_{2n} et est strictement contenu dans K_{2n-2} . Par suite, si $n \neq m$ sont deux entiers non nuls et si $v \in \varpi^{-n}A \setminus \varpi^{-n+1}A$, $w \in \varpi^{-m}A \setminus \varpi^{-m+1}A$, les représentations $\text{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B} \chi_{B,v}^\pm$ et $\text{Ind}_{\tilde{P}_{B,w}}^{P_B} \chi_{B,w}^\pm$ ne sont pas équivalentes et distinctes de la représentation triviale. D'autre part, si n est un entier non nul, $v, w \in \varpi^{-n}A \setminus \varpi^{-n+1}A$ et $\epsilon, \epsilon' \in \{\pm\}$, il suit de la méthode des petits groupes de Mackey appliquée au sous-groupe invariant K_n que les représentations $\text{Ind}_{\tilde{P}_{B,v}}^{P_B} \chi_{B,v}^\epsilon$ et $\text{Ind}_{\tilde{P}_{B,w}}^{P_B} \chi_{B,w}^{\epsilon'}$ ne peuvent être équivalentes que si v et w sont dans la même P_B -orbite et $\epsilon' = \epsilon$. Il en résulte que les représentations $M_{0,0}^B$, $M_{n,0}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $M_{n,j}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2$, sont deux à deux non équivalentes.

(iii) Cette assertion est conséquence immédiate de l'assertion (ii) et du fait que, d'après le corollaire 4.5.1, la restriction de la représentation métaplectique S_ψ^A à P_B est égale à $\zeta \otimes M_{A|P_B}$. ■

5.2 On garde les notations du paragraphe précédent. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{E}_n^B = \mathcal{E}_{n,0}^B \oplus \mathcal{E}_{n,2}^B.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0^B &= \{f \in \mathcal{H}_\psi^A \mid \text{Supp } f \subset B^*\}, \\ \mathcal{E}_n^B &= \{f \in \mathcal{H}_\psi^A \mid \text{Supp } f \subset \varpi^{-n}(B^* \setminus B)\}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Théorème 5.2.1 (i) *Le sous-espace \mathcal{E}_0^B est non nul. Les sous-espaces $\mathcal{E}_0^{B,-}$ et $\mathcal{E}_n^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sont non nuls si et seulement si $l > 0$. Les sous-espaces $\mathcal{E}_{n,1}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$, sont non nuls si et seulement si $l < r$.*

(ii) *Lorsqu'ils sont non nuls, les sous-espaces $\mathcal{E}_n^{B,\pm}$ et $\mathcal{E}_{n,1}^{B,\pm}$, $n \in \mathbb{N}$ sont invariants et irréductibles sous la restriction de la représentation métaplectique S_ψ^A à K_B . Les représentations de K_B ainsi obtenues sont deux à deux non équivalentes. La restriction de la représentation métaplectique à K_B est sans multiplicité et somme directe de ces représentations.*

(iii) *On a :*

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{E}_0^{B,+} &= 1 + \frac{1}{2}(q^l - 1) \\ \dim \mathcal{E}_0^{B,-} &= \frac{1}{2}(q^l - 1) \\ \dim \mathcal{E}_n^{B,\pm} &= \frac{1}{2}q^{2rn-l}(q^{2l} - 1), \quad n \geq 1 \\ \dim \mathcal{E}_{n,1}^{B,\pm} &= \frac{1}{2}q^{2rn+l}(q^{2(r-l)} - 1), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Démonstration : (i) C'est une conséquence immédiate de l'assertion (i) du lemme 5.1.2.

(ii) Compte tenu du fait que K_B est engendré par P_B et ς_B , de la formule 4.21 du corollaire 4.5.1 et du lemme 5.1.2, il suffit de montrer que pour tout entier naturel n , les espaces \mathcal{E}_n^B et $\mathcal{E}_{n,1}^B$ sont invariants sous l'opérateur $M_A(\varsigma_B)$ et qu'aucun des espaces $\mathcal{E}_{n,0}^{B,\pm}$ ne l'est.

Commençons par remarquer qu'il suit du lemme 4.4.1 que si $v \in W$, $\varsigma_B \delta_v$ est combinaison linéaire de δ_w avec $w \in \varsigma_B(v + A)$. Soit n un entier naturel. L'espace $\mathcal{E}_{n,1}^B$ est engendré par les vecteurs δ_v , $v \in \varpi^{-n}(\varpi^{-1}B \setminus B^*)$. L'ensemble $\varpi^{-1}B \setminus B^*$ est à la fois K_B -invariant et réunion de classes modulo A . Notre remarque montre alors que $\mathcal{E}_{n,1}^B$ est invariant sous l'action de $M_A(\varsigma_B)$, comme voulu.

L'espace $\mathcal{E}_{n,0}^B$ (resp. $\mathcal{E}_{n,2}^B$) est engendré par les vecteurs δ_v , $v \in \varpi^{-n}(A \setminus B)$ (resp. $v \in \varpi^{-n}(B^* \setminus A)$). Or, il est clair que K_B laisse stable $B^* \setminus B$ et on vérifie facilement que $\varsigma_B(A \setminus B) \subset B^* \setminus A$. Ceci montre que l'espace \mathcal{E}_n^B est invariant sous l'action de $M_A(\varsigma_B)$ et qu'aucun des espaces $\mathcal{E}_{n,0}^{B,\pm}$ ne l'est. Ceci achève la démonstration de l'assertion (ii).

(iii) La multiplication des scalaires induit une action du groupe $\{\pm 1\}$ dans W/A et on considère l'espace quotient de cette action $\{\pm 1\} \setminus W/A$.

On a $\mathcal{E}_0^{B,+} = \mathbb{C}\delta_0 \oplus \mathcal{E}_{0,2}^{B,+}$ et $\mathcal{E}_0^{B,-} = \mathcal{E}_{0,2}^{B,-}$, tandis qu'une base de $\mathcal{E}_{0,2}^{B,\pm}$ est constituée des $\delta_v \pm \delta_{-v}$, pour v parcourant un système de représentants des classes de $\{\pm 1\} \setminus W/A$ contenues dans $B^* \setminus A$. On a donc $\dim \mathcal{E}_{0,2}^{B,\pm} = \frac{1}{2}([B^*/A] - 1)$. Mais la suite exacte $0 \rightarrow A/B \rightarrow B^*/B \rightarrow B^*/A \rightarrow 0$ montre que $q^{2l} = [B^*/B] = [A/B][B^*/A]$. Or, A/B étant un lagrangien du \mathbb{F}_q -espace symplectique b^* de dimension $2l$, on a $[A/B] = q^l$ et donc $[B^*/A] = q^l$. D'où la formule pour les dimensions des espaces $\mathcal{E}_0^{B,\pm}$.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Comme $\varpi^{-n}(B^* \setminus B)$ (resp. $\varpi^{-n}(\varpi^{-1}B \setminus B^*)$) ne rencontre pas A , on voit que $\dim \mathcal{E}_n^{B,\pm} = \frac{1}{2}([\varpi^{-n}B^*/A] - [\varpi^{-n}B/A])$ (resp. $\dim \mathcal{E}_{n,1}^{B,\pm} = \frac{1}{2}([\varpi^{-(n+1)}B/A] - [\varpi^{-n}B^*/A])$). Or, on a $[\varpi^{-n}B^*/A] = q^{2rn+l}$ et $[\varpi^{-n}B/A] = q^{2rn-l}$. D'où le résultat cherché. ■

5.3 On reprend les notations du paragraphe précédent et on désigne par $S_n^{B,\pm}$ (resp. $S_{n,1}^{B,\pm}$) la représentation de K_B induite par la représentation S_ψ^A dans le sous-espace $\mathcal{E}_n^{B,\pm}$ (resp. $\mathcal{E}_{n,1}^{B,\pm}$) lorsque celui-ci est non nul. Nous allons utiliser les résultats de [4] rappelés dans le paragraphe 3.4 pour donner une description des représentations $S_n^{B,\pm}$ et $S_{n,1}^{B,\pm}$ comme représentations induites.

Étant donné $x \in W$, on désigne par \hat{x} (resp. \dot{x}) la classe de x dans le \mathcal{O} -module quotient W/B^* (resp. W/B) et on rappelle que x s'identifie à l'élément $(x, 0)$ de $H(W)$.

Lemme 5.3.1 *Soit $x \in W$ et soit n le plus petit entier naturel tel que $x \in \varpi^{-(n+1)}B$.*

(i) *Pour tout $g \in K_B(\hat{x})$, le commutateur $g^{-1}xgx^{-1}$ est contenu dans le sous-groupe*

$B^* \times \varpi^{\lambda_\psi - n - 1} \mathcal{O}$ de $H(W)$.

(ii) Si $x \notin B^*$, on a $K_B(\hat{x}) = K_B(x)K'_B(\hat{x})$.

(iii) Si $x \in \varpi^{-(n+1)}B \setminus \varpi^{-n}B^*$, on a

$$p_{Sp(\mathfrak{b}^*)}(K_B(x)) = Sp(\mathfrak{b}^*).$$

(iv) Si $x \in \varpi^{-n}B^* \setminus \varpi^{-n}B$, on a

$$p_{Sp(\mathfrak{b}^*)}(K_B(x)) = Sp(\mathfrak{b}^*)(p_{\mathfrak{b}^*}(\varpi^n x)).$$

Démonstration : (i) Si $g \in K_B(\hat{x})$, on a

$$g^{-1}xgx^{-1} = (g^{-1}x - x, \frac{1}{2}\beta(x, g^{-1}x)) \quad (5.5)$$

avec $g^{-1}x - x \in B^*$ et

$$\frac{1}{2}\beta(x, g^{-1}x) = \frac{1}{2}\beta(x - g^{-1}x, g^{-1}x) \in \beta(B^*, \varpi^{-(n+1)}B) \subset \varpi^{\lambda_\psi - n - 1} \mathcal{O}.$$

(ii) L'inclusion $K_B(x)K'_B(\hat{x}) \subset K_B(\hat{x})$ est claire. Soit donc $g \in K_B(\hat{x})$. Par définition, on a $gx \in x + B^*$. D'autre part, $\varpi^{n+1}x \in B$ et $g\varpi^{n+1}x \in \varpi^{n+1}x + \varpi^{n+1}B^*$. Si $\varpi^{n+1}x \notin \varpi B^*$, l'assertion (i) du lemme 2.7.1 montre qu'il existe $h \in K'_B$ tel que $hg\varpi^{n+1}x = \varpi^{n+1}x$. Si $\varpi^{n+1}x \in \varpi B^*$, on a $n \geq 1$, $\varpi^n x \in B^* \setminus B$ et $g\varpi^n x \in \varpi^n x + \varpi^n B^* \subset \varpi^n x + B$, de sorte que le même argument montre qu'il existe $h \in K'_B$ tel que $hg\varpi^n x = \varpi^n x$. Dans tous les cas, on a trouvé $h \in K'_B$ tel que $hgx = x$ et il est alors évident que $h \in K'_B(\hat{x})$.

(iii) Soit $g \in Sp(\mathfrak{b}^*)$. Désignons par K_B'' le noyau du morphisme $p_{Sp(\mathfrak{b})}$ de K_B sur $Sp(\mathfrak{b})$. Il suit du lemme 2.4.1 que $p_{Sp(\mathfrak{b}^*)}(K_B'') = Sp(\mathfrak{b}^*)$. Il existe donc $\tilde{g} \in K_B''$ tel que $p_{Sp(\mathfrak{b}^*)}(\tilde{g}) = g$. Mais, par définition de K_B'' , on a $\tilde{g}(\varpi^{n+1}x) \in \varpi^{n+1}x + \varpi B^*$. D'après l'assertion (i) du lemme 2.7.1, il existe $h \in K'_B$ tel que $h\tilde{g}\varpi^{n+1}x = \varpi^{n+1}x$. On a alors $h\tilde{g} \in K_B(x)$ et $p_{Sp(\mathfrak{b}^*)}(h\tilde{g}) = p_{Sp(\mathfrak{b}^*)}(\tilde{g}) = g$. D'où l'assertion (iii).

(iv) L'inclusion $p_{Sp(\mathfrak{b}^*)}(K_B(x)) \subset Sp(\mathfrak{b}^*)(p_{\mathfrak{b}^*}(\varpi^n x))$ est claire. Soit donc g et \tilde{g} des éléments respectifs de $Sp(\mathfrak{b}^*)(p_{\mathfrak{b}^*}(\varpi^n x))$ et K_B tels que $p_{Sp(\mathfrak{b}^*)}(\tilde{g}) = g$. On a alors $\tilde{g}\varpi^n x \in \varpi^n x + B$. Utilisant l'assertion (i) du lemme 2.7.1, on conclut comme pour l'assertion (iii). ■

Soit $x \in W$. Il suit du lemme précédent que $x^{-1}K_B(\hat{x})x$ est un sous-groupe de $K_B \rtimes \overline{H}(B^*)$. Rappelons-nous la représentation $\tilde{S}_\psi \tilde{\rho}_\psi$ de $K_B \rtimes \overline{H}(B^*)$ définie au paragraphe

4.2 par la formule 4.3. On définit alors la représentation $\sigma_{\dot{x}}$ du groupe $K_B(\hat{x})$ en posant

$$\sigma_{\dot{x}}(g) = \tilde{S}_{\tilde{\psi}} \tilde{\rho}_{\tilde{\psi}}(xgx^{-1}), \quad g \in K_B(\hat{x}) \quad (5.6)$$

(on vérifie que la représentation $\sigma_{\dot{x}}$ ne dépend que de la classe $\dot{x} \in W/B$).

Supposons que $x \notin B^*$. Il suit de la formule 5.5 que l'on a

$$\sigma_{\dot{x}}(g) = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(x, g^{-1}x)\right) \tilde{S}_{\tilde{\psi}}(g) \tilde{\rho}_{\tilde{\psi}}(g^{-1}x - x, 0), \quad g \in K_B(\hat{x}). \quad (5.7)$$

De plus, il résulte de l'assertion (ii) du lemme 5.3.1 que la représentation $\sigma_{\dot{x}}$ satisfait les relations suivantes qui la déterminent entièrement :

$$\begin{aligned} \sigma_{\dot{x}}(g) &= \tilde{S}_{\tilde{\psi}}(g), \quad g \in K_B(x), \\ \sigma_{\dot{x}}(h) &= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(x, h^{-1}x)\right) \tilde{\rho}_{\tilde{\psi}}(h^{-1}x - x, 0) \\ &= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(hx, x)\right) \tilde{\rho}_{\tilde{\psi}}(x - hx, 0), \quad h \in K'_B(\hat{x}). \end{aligned}$$

Dans la suite, on désigne par $\widetilde{K_B(\hat{x})}$ le sous-groupe $\{\pm Id\}K_B(\hat{x})$ de K_B .

Lorsque $x \in B^*$, $\widetilde{K_B(\hat{x})} = K_B(\hat{x}) = K_B$ et la représentation $\sigma_{\dot{x}}$ de K_B est équivalente à $\tilde{S}_{\tilde{\psi}} = S_0$ et est réalisée dans le même espace $\mathcal{H}_{\tilde{\psi}}^{\pm}$. On a $-Id \in K_B$ et on note $\mathcal{H}_{\tilde{\psi}}^{\pm}$ le sous-espace propre de $-Id$ pour la valeur propre ± 1 , lequel est invariant par $\sigma_{\dot{x}}$. On désigne par $\sigma_{\dot{x}}^{\pm}$ la représentation de K_B dans ce sous-espace qui en résulte, lorsque celui-ci est non nul. On a $\mathcal{H}_{\tilde{\psi}}^{\pm} = \mathcal{H}_{\tilde{\psi}}^{+} \oplus \mathcal{H}_{\tilde{\psi}}^{-}$ et donc $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{x}}^{+} \oplus \sigma_{\dot{x}}^{-}$, lorsque $\mathcal{H}_{\tilde{\psi}}^{\pm}$ est non nul ; ceci se produit exactement lorsque $l \neq 0$. Dans le cas contraire, on a $\sigma_{\dot{x}} = \sigma_{\dot{x}}^{+}$.

Supposons que $x \notin B^*$. Dans ce cas, $-Id$ n'appartient pas à $K_B(\hat{x})$. On étend alors la représentation $\sigma_{\dot{x}}$ en une représentation $\sigma_{\dot{x}}^{\pm}$ du groupe $\widetilde{K_B(\hat{x})}$ en décidant que $\sigma_{\dot{x}}^{\pm}(-Id) = \pm Id$.

Théorème 5.3.1 (i) Si $l = 0$, $S_0^{B,+}$ est la représentation triviale.

(ii) Si $l > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n^{B,\pm} = \text{Ind}_{\widetilde{K_B(\hat{x})}}^{K_B} \sigma_{\dot{x}}^{\pm}, \quad x \in (\varpi^{-n}B^* \setminus \varpi^{-n}B) + B^*.$$

(iii) Si $l < r$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_{n,1}^{B,\pm} = \text{Ind}_{\widetilde{K_B(\hat{x})}}^{K_B} \sigma_{\dot{x}}^{\pm}, \quad x \in (\varpi^{-(n+1)}B \setminus \varpi^{-n}B^*) + B^*.$$

Démonstration : On utilise la réalisation $S_{\tilde{\psi}}^B$ de la représentation de Weil dans l'espace

\mathcal{H}_ψ^B donnée au paragraphe 4.2 et l'opérateur d'entrelacement $\mathcal{I}_{A,B}$ entre cette dernière et la réalisation S_ψ^A dans l'espace \mathcal{H}_ψ^A .

Si \mathcal{F} est un sous-espace de \mathcal{H}_ψ^B , on désigne par \mathcal{F}^+ (resp. \mathcal{F}^-) le sous-espace de \mathcal{F} constitué des fonctions paires (resp. impaires).

Si $x \in W$, on désigne par \mathcal{F}_x le sous-espace de \mathcal{H}_ψ^B constitué des fonctions dont le support est contenu dans $K_B x$, si $x \notin B^*$, et dans B^* , sinon (la définition et la notation sont justifiées parce que, d'après le lemme 2.7.1 (i), $x + B^* \subset K_B x$, si $x \in W \setminus B^*$). Il est clair que les sous-espaces \mathcal{F}_x^\pm sont invariants sous l'action de la représentation S_ψ^B restreinte à K_B . D'autre part, il suit du lemme 2.7.1 (ii) que les K_B -orbites dans $W \setminus B^*$ sont les $\varpi^{-(n+1)} B^* \setminus \varpi^{-(n+1)} B$ et $\varpi^{-(n+1)} B \setminus \varpi^{-n} B^*$ $n \in \mathbb{N}$. Comme l'opérateur d'entrelacement $\mathcal{I}_{A,B}$ conserve les supports et la parité, on déduit de ceci que l'on a

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{A,B}(\mathcal{F}_x^\pm) &= \mathcal{E}_0^{B^\pm}, \quad x \in B^*, \\ \mathcal{I}_{A,B}(\mathcal{F}_x^\pm) &= \mathcal{E}_{n+1}^{B^\pm}, \quad x \in \varpi^{-(n+1)} B^* \setminus \varpi^{-(n+1)} B, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{I}_{A,B}(\mathcal{F}_x^\pm) &= \mathcal{E}_{n,1}^{B^\pm}, \quad x \in \varpi^{-(n+1)} B \setminus \varpi^{-n} B^*, \quad n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Soit $x \in W$. Désignons par \mathcal{G}_x^\pm l'espace de la représentation $\text{Ind}_{\widetilde{K_B(x)}}^{K_B} \sigma_x^\pm$. Alors, l'application $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$ définie par $\tilde{\varphi}(g) = \tilde{S}_\psi(g)\varphi(g^{-1}x)$, $g \in K_B$, induit un isomorphisme de K_B -modules de \mathcal{F}_x^\pm sur \mathcal{G}_x^\pm . D'où le théorème. \blacksquare

5.4 Dans ce paragraphe nous allons mettre en relation les résultats du précédent avec ceux du paragraphe 3.5, dont nous reprenons les notations.

Soit n un entier naturel. Le sous-ensemble $H(\varpi^{-(n+1)} B) = \varpi^{-(n+1)} B \times \varpi^{\lambda_\psi - 1 - 2(n+1)} \mathcal{O}$ est un sous-groupe K_B -invariant de $H(W)$.

On désigne par \mathcal{H}_n^B le sous-espace de \mathcal{H}_ψ^B constitué des fonctions dont le support est contenu dans $\varpi^{-(n+1)} B$. En fait, \mathcal{H}_n^B est l'espace des fonctions φ définies sur $\varpi^{-(n+1)} B$ à valeurs dans l'espace \mathcal{H}_ψ de la représentation de Schrödinger de type $\bar{\psi}$ du groupe de Heisenberg $H(\mathfrak{b}^*)$, vérifiant la relation 4.1. Il est clairement invariant sous la restriction de S_ψ^B (resp. R_ψ^B) à K_B (resp. $K_B \ltimes H(\varpi^{-(n+1)} B)$) : on note $S_\psi^{B,n}$ (resp. $R_\psi^{B,n}$) la représentation de K_B (resp. $K_B \ltimes H(\varpi^{-(n+1)} B)$) induite par cette dernière dans \mathcal{H}_n^B .

Soit ψ_{2n+1} le caractère primitif de O_{2n+1} défini par

$$\psi_{2n+1}(p_{O_{2n+1}}(t)) = \psi(\varpi^{\lambda_\psi - 2(n+1)} t), \quad t \in \mathcal{O}.$$

On considère le O_{2n+1} -module symplectique $\mathfrak{b}_{2n+1} = B/\varpi^{2(n+1)} B^*$ et le sous-module isotrope $Sp(\mathfrak{b}_{2n+1})$ -invariant maximal $\mathfrak{u} = \varpi^{n+1} B/\varpi^{2(n+1)} B^*$ (voir le lemme 3.5.1). On rappelle la représentation $\rho_{\mathfrak{u}^\perp, \psi_{2n+1}}$ de $H(\mathfrak{u}^\perp)$, inflation de la représentation de Schrödinger $\rho_{\mathfrak{u}^\perp, \psi_{2n+1}}$ de type ψ_{2n+1} de $H(\overline{\mathfrak{u}^\perp})$.

Soit $\mu : \mathbb{F}_q \longrightarrow O_{2n+1}$ l'application définie par :

$$\mu(p_{\mathbb{F}_q}(t)) = p_{O_{2n+1}}(\varpi^{2n+1}t), t \in \mathcal{O}.$$

Il est immédiat que μ induit un isomorphisme de \mathbb{F}_q -modules de \mathbb{F}_q sur l'idéal minimal $\varpi^{2n+1}\mathcal{O}/\varpi^{2(n+1)}\mathcal{O}$. De plus, on a

$$\psi_{2n+1} \circ \mu = \overline{\psi}. \quad (5.8)$$

L'application $\mu_* : H(\mathfrak{b}^*) \longrightarrow H(\overline{\mathfrak{u}^\perp})$ définie par :

$$\mu_*(p_{\mathfrak{b}^*}(x), t) = (p_{\mathfrak{b}_{2n+1}}(\varpi^{n+1}x), \mu(t)), x \in B^*, t \in \mathbb{F}_q, \quad (5.9)$$

est un morphisme injectif de groupes. Il suit de la relation 5.8 que la représentation $\rho_{\overline{\mathfrak{u}^\perp}, \psi_{2n+1}} \circ \mu_*$ est la représentation de Schrödinger de type $\overline{\psi}$ de $H(\mathfrak{b}^*)$. On peut donc supposer que $\mathcal{H}_{\overline{\psi}}$ est également l'espace de la représentation $\rho_{\overline{\mathfrak{u}^\perp}, \psi_{2n+1}}$ et écrire alors

$$\rho_{\overline{\psi}} = \rho_{\overline{\mathfrak{u}^\perp}, \psi_{2n+1}} \circ \mu_*. \quad (5.10)$$

Par suite, la représentation de Weil $S_{\overline{\psi}}$ de type $\overline{\psi}$ de $Sp(\mathfrak{b}^*)$ est également une représentation de Weil de type ψ_{2n+1} de $Sp(\overline{\mathfrak{u}^\perp})$. On choisit alors pour représentation de Weil de type ψ_{2n+1} de $Sp(\mathfrak{b}_{2n+1})$ relative au morphisme $r_{\mathfrak{u}} : Sp(\mathfrak{b}_{2n+1}) \longrightarrow Sp(\overline{\mathfrak{u}^\perp})$ la représentation $\sigma = S_{\overline{\psi}} \circ r_{\mathfrak{u}}$.

On note \mathcal{H}_n l'espace de la représentation

$$R^{\mathfrak{u}, \sigma} = \text{Ind}_{Sp(\mathfrak{b}_{2n+1}) \rtimes H(\mathfrak{u}^\perp)}^{Sp(\mathfrak{b}_{2n+1}) \rtimes H(\mathfrak{b}_{2n+1})} \sigma \rho_{\mathfrak{u}^\perp, \psi_{2n+1}}. \quad (5.11)$$

La restriction $S^{\mathfrak{u}, \sigma}$ de la représentation $R^{\mathfrak{u}, \sigma}$ à $Sp(\mathfrak{b}_{2n+1})$ est une représentation de Weil de type ψ_{2n+1} .

Il suit de la relation 3.14 que l'espace de la représentation $R^{\mathfrak{u}, \sigma}$ s'identifie, via l'application de restriction au sous-ensemble \mathfrak{b}_{2n+1} du sous-groupe $H(\mathfrak{b}_{2n+1})$ du produit semi-direct $Sp(\mathfrak{b}_{2n+1}) \rtimes H(\mathfrak{b}_{2n+1})$, à l'espace des fonctions φ définies sur \mathfrak{b}_{2n+1} , à valeurs dans l'espace $\mathcal{H}_{\overline{\psi}}$ de la représentation $\rho_{\mathfrak{u}^\perp, \psi_{2n+1}}$, qui vérifient la relation

$$\varphi(x + u) = \psi_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\beta_{\mathfrak{b}_{2n+1}}(x, u)\right)\rho_{\mathfrak{u}^\perp, \psi_{2n+1}}(u)\varphi(x), x \in \mathfrak{b}_{2n+1}, u \in \mathfrak{u}^\perp. \quad (5.12)$$

L'application $p : K_B \rtimes H(\varpi^{-(n+1)}B) \longrightarrow Sp(\mathfrak{b}_{2n+1}) \rtimes H(\mathfrak{b}_{2n+1})$ définie par :

$$p(g(x, t)) = p_{Sp(\mathfrak{b}_{2n+1})}(g)(p_{\mathfrak{b}_{2n+1}}(\varpi^{n+1}x), p_{O_{2n+1}}(\varpi^{2(n+1)-\lambda}t)),$$

$g \in K_B, (x, t) \in H(\varpi^{-(n+1)}B)$, est un morphisme surjectif de groupes.

Lemme 5.4.1 (i) Si φ est un élément de \mathcal{H}_n , l'application φ^B définie sur $\varpi^{-(n+1)}B$ par

$$\varphi^B(x) = \varphi(p_{b_{2n+1}}(\varpi^{n+1}x)), x \in \varpi^{-(n+1)}B,$$

est un élément de \mathcal{H}_n^B .

(ii) L'application $\varphi \mapsto \varphi^B$ est un isomorphisme de \mathcal{H}_n sur \mathcal{H}_n^B qui entrelace les représentations $S^{u,\sigma} \circ p_{Sp(b_{2n+1})}$ et $S_\psi^{B,n}$ de K_B .

(iii) Soit $x \in \varpi^{-(n+1)}B$ et $\varphi \in \mathcal{H}_n$. Alors dire que le support de φ^B est contenu dans $K_B x$ est équivalent à dire que le support de φ est contenu dans l'orbite de $p_{b_{2n+1}}(\varpi^{n+1}x)$ modulo u^\perp sous l'action de $Sp(b_{2n+1})$.

Démonstration : (i) Soit $\varphi \in \mathcal{H}_n$. Soit $x \in \varpi^{-(n+1)}B$ et $b \in B^*$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \varphi^B(x+b) &= \varphi(p_{b_{2n+1}}(\varpi^{n+1}(x+b))) \\ &= \psi_{2n+1}(\frac{1}{2}\beta_{b_{2n+1}}(p_{b_{2n+1}}(\varpi^{n+1}x), p_{b_{2n+1}}(\varpi^{n+1}b))) \\ &\quad \rho_{u,\psi_{2n+1}}(p_{b_{2n+1}}(\varpi^{n+1}b))\varphi^B(x) \\ &= \psi_{2n+1}(p_{O_{2n+1}}(\varpi^{2(n+1)-\lambda}\frac{1}{2}\beta(x,b)))\rho_{u,\psi_{2n+1}} \circ \mu_*(p_{b^*}(b))\varphi^B(x) \\ &= \psi_{2n+1} \circ \mu(p_{\mathbb{F}_q}(\varpi^{1-\lambda}\frac{1}{2}\beta(x,b)))\rho_{u,\psi_{2n+1}} \circ \mu_*(p_{b^*}(b))\varphi^B(x) \\ &= \bar{\psi}(p_{\mathbb{F}_q}(\varpi^{1-\lambda}\frac{1}{2}\beta(x,b)))\rho_{\bar{\psi}}(p_{b^*}(b))\varphi^B(x) \\ &= \psi(\frac{1}{2}\beta(x,b))\tilde{\rho}_{\bar{\psi}}(b)\varphi^B(x), \end{aligned}$$

montrant que φ^B satisfait la relation 4.1.

(ii) Il est clair que l'application $\varphi \mapsto \varphi^B$ est injective. Réciproquement, soit $\varphi \in \mathcal{H}_n^B$. La relation 4.1 satisfaite par φ , montre qu'il existe une unique fonction φ^u définie sur b_{2n+1} et à valeurs dans $\mathcal{H}_{\bar{\psi}}^-$ telle que

$$\varphi^u(p_{b_{2n+1}}(\varpi^{n+1}x)) = \varphi(x), x \in \varpi^{-(n+1)}B$$

et que cette fonction satisfait la relation 5.12. Ceci montre que l'application $\varphi \mapsto \varphi^B$ est bien une bijection linéaire de \mathcal{H}_n sur \mathcal{H}_n^B . Le fait que ce soit un opérateur d'entrelacement est facile et est laissé au lecteur.

(iii) est clair. ■

Remarques. (i) Il suit de l'assertion (iii) du lemme précédent que, pour tout $x \in \varpi^{-(n+1)}B$, l'application $\varphi \mapsto \varphi^B$ induit un isomorphisme entre les représentations $S_{p_{b_{2n+1}}(\varpi^{n+1}x)}^\pm \circ p_{Sp(b_{2n+1})}$ et S_x^\pm de K_B . En particulier, la décomposition en irréductibles de la restriction à K_B de la représentation de Weil de $Sp(W)$ se ramène à la

décomposition en irréductibles des représentations de Weil des groupes symplectiques $Sp(b_{2n+1})$ sur l'anneau local fini O_{2n+1} , démontrée dans le théorème 3.5.1.

(ii) La décomposition en irréductibles de la restriction à K_B de la représentation de Weil a été obtenue par D. Prasad dans [16] dans le cas où $B = B^*$, i.e. K_B est le compact maximal standard. Dans [4] G. Cliff, D. McNeilly et F. Szechtman remarquent que leurs résultats concernant la représentation de Weil de $Sp(W)$ lorsque W est un module symplectique libre sur un anneau fini local et principal, permettent d'obtenir la décomposition en irréductibles de la restriction à K_B de la représentation de Weil également lorsque $B = \varpi B^*$, i.e. K_B n'est pas dans la classe de conjugaison du compact maximal standard, mais lui est conjugué par le groupe des similitudes symplectiques.

6 Restriction de la représentation de Weil à un tore maximal elliptique.

6.1 Pour $Sp(W)$, un tore est elliptique si et seulement s'il est anisotrope, c'est à dire si et seulement s'il est compact. Dans ce paragraphe, nous montrons que la restriction de la représentation de Weil à un tore maximal elliptique est sans multiplicité.

Théorème 6.1.1 *Soit $T \subset Sp(W)$ un tore maximal elliptique. La restriction de la représentation de Weil S_ψ à T est somme directe de caractères intervenant tous avec multiplicité 1.*

Démonstration : Comme T est un groupe commutatif et compact, il est clair que la restriction de la représentation S_ψ^B à T est somme directe de caractères. Il s'agit de montrer qu'ils interviennent tous avec la multiplicité 1.

Soit \mathcal{H}_ψ^∞ l'espace des vecteurs \mathcal{C}^∞ de la représentation S_ψ , i.e. des vecteurs $v \in \mathcal{H}_\psi$ tels que l'application $x \mapsto S_\psi(x).v$ soit localement constante. C'est un sous-espace vectoriel dense et S_ψ -invariant.

Si G est un sous-groupe de $Sp(W)$, on désigne par \tilde{G} son image réciproque dans $Mp(W)$. Posons $G_1 = G_2 = T$. Puisque T est son propre commutant dans $Sp(W)$, (G_1, G_2) est une paire réductive duale dans $Sp(W)$ selon Howe (voir [8]). Comme T est compact, il résulte du théorème 4.2.1 que $\tilde{T} = T \times \{1, \epsilon\}$, où ϵ est l'élément non trivial du noyau de la projection de $Mp(W)$ sur $Sp(W)$. Soit χ un caractère unitaire de T et soit $\tilde{\chi}$ le prolongement de χ à \tilde{T} non trivial sur ϵ . Désignons par \mathbb{C}_χ (resp. $\mathbb{C}_{\tilde{\chi}}$) le T -module (resp. \tilde{T} -module) irréductible de dimension 1 correspondant au caractère χ (resp. $\tilde{\chi}$). La conjecture de Howe, démontrée par Waldspurger (voir [20]), appliquée à la représentation $\tilde{\chi} \otimes \tilde{\chi}$ de $\tilde{G}_1 \tilde{G}_2 = \tilde{T}$ montre que l'espace des opérateurs d'entrelacement $Hom_{\tilde{T}}(\mathcal{H}_\psi^\infty, \mathbb{C}_{\tilde{\chi}})$ est de dimension au plus 1. Comme $S_\psi(\epsilon) = -Id$, on a $\dim Hom_{\tilde{T}}(\mathcal{H}_\psi^\infty, \mathbb{C}_{\tilde{\chi}}) = \dim Hom_T(\mathcal{H}_\psi^\infty, \mathbb{C}_\chi) \geq \dim Hom_T(\mathcal{H}_\psi, \mathbb{C}_\chi)$. ■

6.2 Dans les paragraphes qui suivent, nous étudions la décomposition en irréductibles de la restriction de la représentation de Weil à un tore maximal elliptique de $Sp(W)$.

Soit T un tore maximal elliptique de $Sp(W)$. D'après [13], W se décompose de manière unique comme une somme directe orthogonale $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ de sous- T -modules irréductibles sur k . Chaque W_i est donc un sous-espace symplectique de W et l'image T_i de T par l'application $x \mapsto x|_{W_i}$ est un tore maximal elliptique de $Sp(W_i)$ sous l'action duquel W_i est un module irréductible sur k . De plus, l'application $x \mapsto (x|_{W_1}, \dots, x|_{W_n})$ est un isomorphisme naturel du tore T sur le produit direct de tores $T_1 \times \cdots \times T_n$. Dans la suite, nous identifions T et $T_1 \times \cdots \times T_n$ au moyen de cet isomorphisme.

Soit $1 \leq i \leq n$. Le tore T_i étant compact, il est contenu dans un sous-groupe compact maximal K_{B_i} de $Sp(W_i)$, avec B_i un bon réseau T_i -invariant de W_i . Alors $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ est un bon réseau T -invariant de W , de sorte que T est contenu dans le sous-groupe compact maximal K_B de $Sp(W)$. On utilise la section s_B (resp. s_{B_i}) du paragraphe 4.6 pour identifier K_B (resp. K_{B_i}) à un sous-groupe de $Mp(W)$ (resp. $Mp(W_i)$). On a alors

Proposition 6.2.1 *La restriction de la représentation de Weil au tore T s'écrit comme le produit tensoriel extérieur des restrictions pour chaque i de la représentation de Weil de $Mp(W_i)$ à T_i :*

$$(S_{W,\psi})|_T = \bigotimes_{i=1}^n (S_{W_i,\psi})|_{T_i}$$

Démonstration : C'est une conséquence immédiate du lemme 4.7.2 et de la proposition 4.7.1. ■

Il suit de la proposition 6.2.1 que pour connaître la restriction d'une représentation de Weil à un tore elliptique, il suffit de connaître, pour tout espace symplectique W , la restriction de la représentation de Weil de $Mp(W)$ aux tores maximaux T de $Sp(W)$ pour lesquels le T -module W est irréductible sur k . C'est ce que nous allons faire dans les paragraphes 6.3 à 6.7.

6.3 Dans la suite, si F' est une extension de degré fini d'un corps F , nous désignerons par $\text{tr}_{F'/F}$ (resp. $N_{F'/F}$) la trace (resp. la norme) de F' sur F .

Pour simplifier nous dirons qu'un tore $T \subset Sp(W)$ est irréductible si le T -module W est irréductible sur k .

Suivant [7] et [13], nous allons donner une description des classes de conjugaison de tores maximaux irréductibles de $Sp(W)$.

Soit k' une extension de degré r de k et k'' une extension quadratique de k' . On note τ l'élément non trivial du groupe de Galois de k'' sur k' . Soit $u \in k''$ un élément non

nul et de trace nulle relativement à k' . Alors, la formule

$$\beta_u(x, y) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}_{k''/k} u x^\tau y, \quad x, y \in k'', \quad (6.1)$$

définit une forme symplectique sur le k -espace vectoriel k'' . L'action de k'' sur lui-même par multiplication permet de l'identifier à un sous-corps de l'algèbre $\operatorname{End}_k(k'')$ des endomorphismes de k -espace vectoriel de k'' . On désigne par $T_{k'', k'}$ le sous-groupe multiplicatif de k''^\times constitué des éléments de norme 1 relativement à k' . Alors $T_{k'', k'}$ est l'ensemble des k -points d'un tore maximal elliptique du groupe symplectique $Sp(k'', \beta_u)$.

On désigne par $\operatorname{Aut}(k''/k)^\tau$ le sous-groupe du groupe des automorphismes $\operatorname{Aut}(k''/k)$ de k'' sur k constitué des éléments qui commutent à τ . Le groupe $\operatorname{Aut}(k''/k)^\tau$ laisse invariant le sous- k -espace vectoriel de k'' constitué des éléments de trace nulle ainsi que le sous-groupe multiplicatif $\operatorname{Im}(\operatorname{N}_{k''/k'})$. On peut donc former le groupe produit semi-direct $\Gamma_{k'', k'} = \operatorname{Aut}(k''/k)^\tau \ltimes \operatorname{Im}(\operatorname{N}_{k''/k'})$. L'action de $\operatorname{Aut}(k''/k)^\tau$ dans $\ker(\operatorname{tr}_{k''/k'})$ se prolonge à $\Gamma_{k'', k'}$, le groupe $\operatorname{Im}(\operatorname{N}_{k''/k'})$ agissant par multiplication. Dans le cas des tores maximaux irréductibles des groupes symplectiques, les théorème 1.6 et proposition 1.10 de [13] s'énoncent ainsi :

Théorème 6.3.1 (i) Soit $T \subset Sp(W)$ un tore maximal irréductible. Il existe une extension k' de degré r de k , une extension quadratique k'' de k' , un élément $u \in k''^\times$ de trace nulle relativement à k' et φ un isomorphisme d'espaces symplectiques de (k'', β_u) sur W tels que T soit l'image de $T_{k'', k'}$ par l'isomorphisme $\tilde{\varphi} : t \mapsto \varphi \circ t \circ \varphi^{-1}$. De plus, les tores $\tilde{\varphi}(T_{k'', k'})$, φ parcourant l'ensemble des isomorphismes d'espaces symplectiques de (k'', β_u) sur W , forment une classe de conjugaison de tores maximaux dans $Sp(W)$, notée $\mathcal{C}_{k'', k', u}$.

(ii) Pour $i = 1, 2$, soit k'_i (resp. k''_i) une extension de degré r de k (resp. quadratique de k'_i) et $u_i \in k''_i$ un élément non nul de trace nulle relativement à k'_i . Si les classes $\mathcal{C}_{k''_i, k'_i, u_i}$, $i = 1, 2$ sont identiques, il existe un isomorphisme sur k de k''_1 sur k''_2 qui envoie k'_1 sur k'_2 .

(iii) Soit k' une extension de degré r de k et k'' une extension quadratique de k' . Alors l'application $u \mapsto \mathcal{C}_{k'', k', u}$ induit une bijection de $\Gamma_{k'', k'} \setminus \ker(\operatorname{tr}_{k''/k'})$ sur l'ensemble des classes de conjugaison des tores maximaux de $Sp(W)$ isomorphes sur k à $T_{k'', k'}$.

6.4 Dans ce paragraphe, pour chaque tore maximal irréductible T de $Sp(W)$ nous exhibons un bon réseau T -invariant.

Soit $T \subset Sp(W)$ un tore maximal irréductible. D'après le théorème 6.3.1, il existe une extension k' de degré r de k , une extension quadratique k'' de k' et un élément non nul $u \in \ker(\operatorname{tr}_{k''/k'})$ tels que W s'identifie au k -espace symplectique (k'', β_u) et que $T = T_{k'', k'}$.

On note \mathcal{O} (resp. \mathcal{O}' , \mathcal{O}'') l'anneau des entiers, ϖ (resp. ϖ' , ϖ'') une uniformisante, v (resp. v' , v'') la valuation normalisée et q (resp. q' , q'') le cardinal du corps résiduel de k

(resp. k' , k''). On prend ϖ'' tel que $\varpi''^2 = \varpi'$ lorsque k'' est ramifié sur k' , et $\varpi'' = \varpi'$ dans le cas contraire. On note e l'indice de ramification de k' sur k . On a alors $q' = q^{\frac{r}{e}}$ et $q'' = q'$ (resp. $q'' = q'^2$) si k'' est ramifié (resp. non ramifié) sur k' .

On note δ l'entier tel que l'idéal $\varpi'^\delta \mathcal{O}'$ soit la différentielle de k' sur k , i.e. δ est le plus grand entier tel que $\text{tr}_{k'/k}(x) \in \mathcal{O}$ pour tout $x \in \varpi'^{-\delta} \mathcal{O}'$.

Compte tenu du théorème 6.3.1 (ii), on peut supposer que $u = \varpi''$ lorsque k'' est ramifié sur k' et $v''(u) \in \{0, 1\}$ dans le cas contraire : c'est ce que nous faisons désormais.

Comme T est contenu dans \mathcal{O}'' , les idéaux $\varpi''^m \mathcal{O}''$, $m \in \mathbb{Z}$, sont des réseaux T -invariants de W .

Lemme 6.4.1 *Soit $m \in \mathbb{Z}$ et soit $B = \varpi''^m \mathcal{O}''$. Alors le réseau dual de B est donné par*

$$B^* = \begin{cases} \varpi''^{2(e\lambda_\psi - \delta - (m+1))} B & \text{si } k'' \text{ est ramifié sur } k' \\ \varpi'^{e\lambda_\psi - \delta - v''(u) - 2m} B & \text{si } k'' \text{ n'est pas ramifié sur } k'. \end{cases}$$

Démonstration : Le réseau dual de B est un \mathcal{O}'' sous-module de k'' , donc de la forme $B^* = \varpi''^l \mathcal{O}''$, avec l un entier.

Si k'' est ramifié sur k' , on a $u \in \varpi'' \mathcal{O}'^\times$ et $\mathcal{O}'' = \mathcal{O}' + \mathcal{O}' \varpi''$. Il vient alors

$$\begin{aligned} \beta_u(B, \varpi''^{2(e\lambda_\psi - \delta - (m+1))} B) &= \beta_u(\varpi''^m \mathcal{O}'', \varpi''^{2(e\lambda_\psi - \delta - 1) - m} \mathcal{O}'') \\ &= \text{tr}_{k''/k} \varpi''^{2(e\lambda_\psi - \delta - 1) + 1} \mathcal{O}'' \\ &= \text{tr}_{k'/k} \varpi''^{2(e\lambda_\psi - \delta)} \mathcal{O}' \\ &= \varpi^{\lambda_\psi} \text{tr}_{k'/k} \varpi'^{-\delta} \mathcal{O}' \\ &= \varpi^{\lambda_\psi} \mathcal{O}, \end{aligned}$$

d'où le résultat dans ce cas.

Si k'' n'est pas ramifié sur k' , on a $\mathcal{O}'' = \mathcal{O}' + \mathcal{O}' \varpi'^{-v''(u)} u$ et il vient alors

$$\begin{aligned} \beta_u(B, \varpi'^{e\lambda_\psi - \delta - v''(u) - 2m} B) &= \beta_u(\varpi'^m \mathcal{O}'', \varpi'^{e\lambda_\psi - \delta - v''(u) - m} \mathcal{O}'') \\ &= \text{tr}_{k''/k} \varpi'^{e\lambda_\psi - \delta} \mathcal{O}'' \\ &= \text{tr}_{k'/k} \varpi'^{e\lambda_\psi - \delta} \mathcal{O}' \\ &= \varpi^{\lambda_\psi} \mathcal{O}, \end{aligned}$$

d'où le lemme. ■

On pose $\mu = e\lambda_\psi - \delta - v''(u)$. On déduit du lemme précédent le

Corollaire 6.4.1 *On définit le réseau B en posant*

$$B = \begin{cases} \varpi''^\mu \mathcal{O}'' & \text{si } k'' \text{ est ramifié sur } k, \\ \varpi'^{\lfloor \frac{\mu+1}{2} \rfloor} \mathcal{O}'' & \text{si } k'' \text{ est non ramifié sur } k'. \end{cases}$$

Alors B est un bon réseau T -invariant, autodual si et seulement si k'' est ramifié sur k' ou si μ est pair.

Lorsque k'' est non ramifié sur k' et μ est impair, $B^ = \varpi'^{-1}B$ et $b^* = \mathcal{O}''/\varpi' \mathcal{O}''$ est un \mathbb{F}_q espace vectoriel symplectique de dimension $\frac{2r}{e}$.*

6.5 On se donne un tore maximal irréductible T de $Sp(W)$ et on reprend les notations du paragraphe précédent. Nous allons décrire les caractères de T .

Lorsque k'' n'est pas ramifié sur k' , on désigne par ν l'élément de \mathcal{O}''^\times tel que $u = \varpi'^{\nu''(u)}\nu$ et on pose $d = \nu^2$, qui est un élément de \mathcal{O}' . Alors,

$$T = \{\xi + \eta\nu \mid \xi, \eta \in \mathcal{O}' \text{ et } \xi^2 - d\eta^2 = 1\}.$$

Lorsque k'' est ramifié sur k' , on prend $u = \varpi''$ et on a

$$T = \{\xi + \eta\varpi'' \mid \xi, \eta \in \mathcal{O}' \text{ et } \xi^2 - \varpi'\eta^2 = 1\}.$$

Si $j \in \mathbb{N}$, on désigne par T_j le j -ième sous-groupe de congruence de T :

$$T_j = \{g \in T \mid g - 1 \in \varpi''^j \mathcal{O}''\}.$$

On a $T_0 = T$ et, pour $j \geq 1$, T_j est un sous-groupe strict de T que nous allons décrire.

On désigne par $\mu_{q'+1}$ le sous-groupe cyclique de k''^\times constitué des racines $(q'+1)$ -ièmes de l'unité.

Lemme 6.5.1 *a) On suppose que k'' n'est pas ramifié sur k' .*

(i) On a $T = \mu_{q'+1} \times T_1$. La suite T_j , $j \in \mathbb{N}$, est une suite strictement décroissante de sous-groupes de T .

Soit j un entier naturel non nul.

(ii) Pour tout $\eta \in \mathcal{O}'$, il existe un unique élément $\theta_j(\eta)$ de T_j tel que $\theta_j(\eta) - \varpi'^j \eta\nu \in k'$. Cet élément vérifie que $\theta_j(\eta) - \varpi'^j \eta\nu - 1 \in \varpi'^{2j} \mathcal{O}'$ et $\theta_j(\eta)^{-1} = \theta_j(-\eta)$.

(iii) L'application θ_j est une bijection de \mathcal{O}' sur T_j et elle induit, pour tout entier $1 \leq s \leq 2j$, un isomorphisme de groupes de $\mathcal{O}'/\varpi'^s \mathcal{O}'$ sur T_j/T_{j+s} .

b) On suppose que k'' est ramifié sur k' .

(i) On a $T = \{\pm 1\} \times T_1$ et $T_{2j} = T_{2j+1}$, pour tout entier $j > 0$. La suite $(T_{2j+1})_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante de sous-groupes de T .

Soit j un entier naturel.

(ii) Pour tout $\eta \in \mathcal{O}'$, il existe un unique élément $\theta_j(\eta)$ de T_{2j+1} tel que $\theta_j(\eta) - \varpi'^j \eta \varpi'' \in k'$. Cet élément vérifie que $\theta_j(\eta) - \varpi'^j \eta \varpi'' - 1 \in \varpi'^{2j+1} \mathcal{O}'$ et $\theta_j(\eta)^{-1} = \theta_j(-\eta)$.

(iii) L'application θ_j est une bijection de \mathcal{O}' sur T_{2j+1} et elle induit, pour tout entier $1 \leq s \leq 2j+1$, un isomorphisme de groupes de $\mathcal{O}'/\varpi'^s \mathcal{O}'$ sur $T_{2j+1}/T_{2(j+s)}$.

Démonstration : a) On se place dans le cas où k'' n'est pas ramifié sur k' . Le fait que $T = \mu_{q'+1} \times T_1$ et que la suite T_j est décroissante est immédiat. Le fait qu'elle l'est strictement résultera alors du point (iii).

Soit $j \in \mathbb{N}$ non nul et $\eta \in \mathcal{O}'$. Il résulte du lemme de Hensel qu'il existe un unique $\xi \in \varpi' \mathcal{O}'$ tel que $1 + \xi + \varpi'^j \eta \nu$ soit un élément de T , c'est à dire vérifie la relation $(1 + \xi)^2 - d \varpi'^{2j} \eta^2 = 1$. Il suit de celle-ci que $\xi \in \varpi'^{2j} \mathcal{O}'$. D'où l'assertion (ii) et le fait que θ_j est une bijection de \mathcal{O}' sur T_j . Enfin, pour $\eta \in \mathcal{O}'$, on a $\theta_j(\eta)^{-1} = \theta_j(\eta)^\tau = \theta_j(-\eta)$.

Pour $\eta \in \mathcal{O}'$, on a $\theta_j(\eta) \in 1 + \varpi'^j \eta \nu + \varpi'^{2j} \mathcal{O}'$. On en déduit que pour $\eta, \eta' \in \mathcal{O}'$, $\theta_j(\eta) \theta_j(\eta') \in 1 + \varpi'^j (\eta + \eta') \nu + \varpi'^{2j} \mathcal{O}' + \varpi'^{3j} \mathcal{O}''$, puis $\theta_j(\eta) \theta_j(\eta') \theta_j(\eta + \eta')^{-1} \in 1 + \varpi'^{2j} \mathcal{O}' + \varpi'^{3j} \mathcal{O}''$. La dernière affirmation de l'assertion (iii) en découle.

b) On se place dans le cas où k'' est ramifié sur k' . Il est clair que la suite T_j est décroissante et que $T = \{\pm 1\} \times T_1$. Soit $j > 0$ un entier et $x \in T_{2j}$. Alors, on a $x = 1 + \varpi'^j (\xi + \eta \varpi'')$, avec $\xi, \eta \in \mathcal{O}'$ vérifiant la relation $(1 + \varpi'^j \xi)^2 = 1 + \varpi'^{2j+1} \eta^2$. On en déduit immédiatement que $\xi \in \varpi'^{j+1} \mathcal{O}'$, d'où le fait que $x \in 1 + \varpi'^{j+1} \mathcal{O}' + \varpi'^j \varpi'' \mathcal{O}' = 1 + \varpi'^{2j+1} \mathcal{O}''$, i.e. $x \in T_{2j+1}$. On a bien $T_{2j} = T_{2j+1}$. A partir de là, la démonstration des assertions restantes est identique à celle faite dans le cas précédent. ■

Soit $j \in \mathbb{N}$ et χ un caractère de T_j . On appelle conducteur de χ , le plus petit entier λ tel que T_λ soit contenu dans le noyau de χ .

Le seul caractère de conducteur 0 est le caractère trivial.

Lorsque k'' n'est pas ramifié sur k' , les caractères de conducteur au plus 1 de T sont les relèvements à T des caractères de $T/T_1 = \mu_{q'+1}$. Ils forment donc un sous-groupe cyclique d'ordre $q' + 1$ de \hat{T} .

Soit $(,)_{k'}$ le symbole de Hilbert du corps k' . On sait que tout élément g de T s'écrit $g = z(z^{-1})^\tau$ avec $z \in \mathcal{O}''^\times$. On vérifie que le nombre $(\varpi', zz^\tau)_{k'} = \left(\frac{p_{q'}(zz^\tau)}{q'} \right)$ ne dépend

que de g et que la formule

$$\eta_0(g) = (\varpi', zz^\tau)_{k'} = \left(\frac{p_{\mathbb{F}_{q'}}(zz^\tau)}{q'} \right) \quad (6.2)$$

définit un caractère de conducteur 1 de T .

Lorsque k'' est ramifié sur k' , T possède un unique caractère de conducteur 1 : il s'agit du caractère ϵ trivial sur T_1 et tel que $\epsilon(-1) = -1$. Tous les autres caractères de T sont de conducteur pair.

Lemme 6.5.2 *a) On suppose que k'' n'est pas ramifié sur k' .*

(i) Soit $j \geq 1$ un entier. Alors, pour tout entier λ tel que $j < \lambda \leq 3j$ et pour tout $b \in \mathcal{O}'$, la formule

$$\chi_{b,\lambda,j}(t) = \psi\left(-\frac{1}{4} \operatorname{tr}_{k''/k} \varpi'^{\mu-\lambda} b t\right), \quad t \in T_j \quad (6.3)$$

définit un caractère de T_j de conducteur inférieur ou égal à λ .

Le caractère $\chi_{b,\lambda,j}$ est de conducteur λ si et seulement si $b \in \mathcal{O}'^\times$, et tout caractère de T_j de conducteur λ est de cette forme.

Si $a, b \in \mathcal{O}'^\times$, on a

$$\begin{aligned} \chi_{a,\lambda,j} = \chi_{b,\lambda,j} &\iff b - a \in \varpi'^{\lambda-j} \mathcal{O}' \\ &\iff b/a \in 1 + \varpi'^{\lambda-j} \mathcal{O}'. \end{aligned} \quad (6.4)$$

(ii) Soit χ un caractère de T de conducteur $\lambda \geq 2$ et soit j un entier tel que $j < \lambda \leq 3j$. Alors χ est un prolongement à T d'un caractère $\chi_{b,\lambda,j}$ pour un certain $b \in \mathcal{O}'^\times$.

b) On suppose que k'' est ramifié sur k' .

(i) Soit $j \geq 0$ un entier. Alors, pour tout entier λ tel que $j < \lambda \leq 3j + 1$ et pour tout $b \in \mathcal{O}'$, la formule

$$\chi_{b,2\lambda,j}(t) = \psi\left(-\frac{(-1)^{\lambda-\mu}}{4} \operatorname{tr}_{k''/k} \varpi'^{\mu-\lambda} b \varpi'' t\right), \quad t \in T_{2j+1} \quad (6.5)$$

définit un caractère de T_{2j+1} de conducteur inférieur ou égal à 2λ .

Le caractère $\chi_{b,2\lambda,j}$ est de conducteur 2λ si et seulement si $b \in \mathcal{O}'^\times$, et tout caractère de T_{2j+1} de conducteur 2λ est de cette forme.

Si $a, b \in \mathcal{O}'^\times$, on a

$$\begin{aligned} \chi_{a,2\lambda,j} = \chi_{b,2\lambda,j} &\iff b - a \in \varpi'^{\lambda-j} \mathcal{O}' \\ &\iff b/a \in 1 + \varpi'^{\lambda-j} \mathcal{O}'. \end{aligned} \quad (6.6)$$

(ii) Soit χ un caractère de T de conducteur $2\lambda \geq 2$ et soit j un entier tel que $j < \lambda \leq 3j+1$. Alors χ est un prolongement à T d'un caractère $\chi_{b,2\lambda,j}$ pour un certain $b \in \mathcal{O}'^\times$.

Démonstration : a) Si $\eta \in \mathcal{O}'$, on a

$$\chi_{b,\lambda,j}(\theta_j(\eta)) = \psi\left(-\frac{1}{4} \operatorname{tr}_{k''/k} \varpi'^{e\lambda_\psi - \delta + j - \lambda} b d\eta\right).$$

On en déduit que $\chi_{b,\lambda,j} \circ \theta_j$ est un caractère du groupe additif \mathcal{O}' dont le noyau contient l'idéal $\varpi'^{\lambda-j} \mathcal{O}'$. De plus, $\varpi'^{\lambda-j} \mathcal{O}'$ est le plus grand idéal de \mathcal{O}' contenu dans $\ker \chi_{b,\lambda,j} \circ \theta_j$ si et seulement si $b \in \mathcal{O}'^\times$. Il suit alors du lemme 6.5.1 que $\chi_{b,\lambda,j}$ est un caractère de T_j et il est alors clair que son conducteur est inférieur ou égal à λ , l'égalité ayant lieu si et seulement si $b \in \mathcal{O}'^\times$.

Réciproquement, si χ est un caractère de conducteur λ tel que $j < \lambda \leq 3j$, il suit du lemme 6.5.1 que $\chi \circ \theta_j$ est un caractère du groupe additif \mathcal{O}' et que $\varpi'^{\lambda-j} \mathcal{O}'$ est le plus grand idéal de \mathcal{O}' contenu dans son noyau. Il est alors clair qu'il existe $b \in \mathcal{O}'^\times$ tel que $\chi = \chi_{b,\lambda,j}$.

Si $a, b \in \mathcal{O}'^\times$, on a

$$\begin{aligned} \chi_{a,\lambda,j} = \chi_{b,\lambda,j} &\iff \chi_{a,\lambda,j} \circ \theta_j = \chi_{b,\lambda,j} \circ \theta_j \\ &\iff \forall \eta \in \mathcal{O}', \psi\left(\operatorname{tr}_{k''/k} \varpi'^{e\lambda_\psi - \delta + j - \lambda} (b - a) d\eta\right) = 1 \\ &\iff b - a \in \varpi'^{\lambda-j} \mathcal{O}' \\ &\iff b/a \in 1 + \varpi'^{\lambda-j} \mathcal{O}'. \end{aligned}$$

D'où l'assertion (i).

L'assertion (ii) est une conséquence immédiate de (i).

b) La démonstration est identique à celle du cas a), une fois que l'on a remarqué que, pour $\eta \in \mathcal{O}'$,

$$\chi_{b,2\lambda,j}(\theta_j(\eta)) = \psi\left(\frac{(-1)^{\lambda-\mu}}{2} \operatorname{tr}_{k''/k} \varpi'^{e\lambda_\psi - \delta + j - \lambda} b \eta\right).$$

■

6.6 Soit $T \subset Sp(W)$ un tore maximal irréductible et B le bon réseau T -invariant construit au paragraphe 6.4. Alors $T \subset K_B$ et on relève T en un sous-groupe de $Mp(W)$ à l'aide du relèvement s_B de K_B dans $Mp(W)$ défini dans le paragraphe 4.6 (voir théorème 4.6.1 et la remarque en fin de ce paragraphe).

Dans ce paragraphe, on suppose que le \mathcal{O}'' -module B est un réseau autodual et on considère la représentation de Weil S_ψ^B dans l'espace \mathcal{H}_ψ^B . On rappelle les fonctions $\delta_v \in \mathcal{H}_\psi^B$, $v \in k''$ définies par la formule 4.8.

Théorème 6.6.1 a) La fonction δ_0 est, à un scalaire multiplicatif près, l'unique vecteur de poids trivial de T .

b) On suppose que k'' n'est pas ramifié sur k' .

(i) Soit χ un caractère non trivial de T . Alors χ intervient dans la représentation de Weil S_ψ^B si et seulement si son conducteur est pair.

(ii) Soit χ un caractère de T de conducteur pair $2j > 0$. Alors, il existe $a \in \mathcal{O}''^\times$ tel que

$$\chi|_{T_j} = \chi_{aa^\tau, 2j, j}$$

et le sous-espace des vecteurs de poids χ est engendré par la fonction

$$\varphi_\chi = \sum_{g \in T/T_j} \chi(g^{-1}) \delta_{\varpi'^{\frac{\mu}{2}-j} ga}. \quad (6.7)$$

c) On suppose que k'' est ramifié sur k' .

Soit χ un caractère non trivial de T . Alors χ intervient dans la représentation de Weil S_ψ^B si et seulement si son conducteur est un entier pair $2j$ et il existe $a \in \mathcal{O}''^\times$ tel que

$$\chi|_{T_j} = \chi_{aa^\tau, j, [\frac{j}{2}]}$$

Dans ce cas, le sous-espace des vecteurs de poids χ est engendré par la fonction

$$\varphi_\chi = \sum_{g \in T/T_j} \chi(g^{-1}) \delta_{\varpi''^{\mu-j} ga}. \quad (6.8)$$

Démonstration : Il résulte du théorème 6.1.1 que δ_0 est, à un scalaire multiplicatif près, l'unique vecteur de poids trivial de T .

On pose $\lambda = \frac{\mu}{2}$ si k'' n'est pas ramifié sur k' et $\lambda = \mu$ dans le cas contraire. Soit $x \in k''$ tel que $v''(x) < \lambda$ et \dot{x} son image dans k''/B . On écrit $x = \varpi''^{\mu-j} a$ avec $a \in \mathcal{O}''^\times$. Il est immédiat que le stabilisateur $T(\dot{x})$ de \dot{x} dans T est le sous-groupe de congruence $T_{\lambda-v''(x)}$.

La représentation $\sigma_{\dot{x}}$ de $K_B(\dot{x})$ définie par la formule 5.6 est un caractère (comme B est un réseau autodual, \dot{x} et \hat{x} sont le même élément de $k''/B = k''/B^*$). On note $\chi_{\dot{x}}$ sa restriction à $T(\dot{x})$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \chi_{\dot{x}} &= \chi_{aa^\tau, 2(\lambda-v''(x)), \lambda-v''(x)}, \text{ si } k'' \text{ n'est pas ramifié sur } k', \\ \chi_{\dot{x}} &= \chi_{aa^\tau, \lambda-v''(x), [\frac{\lambda-v''(x)}{2}]}, \text{ si } k'' \text{ est ramifié sur } k'. \end{aligned}$$

Soit $S_{T,\dot{x}}$ la représentation de T définie par

$$S_{T,\dot{x}} = \text{Ind}_{T(\dot{x})}^T \chi_{\dot{x}}.$$

L'espace $\mathcal{H}_{T,\dot{x}}$ de cette représentation est l'espace des fonctions $\varphi : T \mapsto \mathbb{C}$ qui vérifient $\varphi(gt) = \chi_{\dot{x}}(t)\varphi(g)$, $g \in T$, $t \in T(\dot{x})$. Si $\varphi \in \mathcal{H}_{T,\dot{x}}$, il existe un unique élément de \mathcal{H}_{ψ}^B , $\mathcal{I}_{T,\dot{x}}\varphi$, de support contenu dans la T -orbite de \dot{x} vérifiant

$$\mathcal{I}_{T,\dot{x}}\varphi(g.x) = \varphi(g^{-1}), g \in T.$$

Soit $X \subset k''/B \setminus \{0\}$ un ensemble de représentants des T -orbites dans $k''/B \setminus \{0\}$. Il résulte des lemmes 5.4.1 et 3.4.1 que l'on a

$$S_{\psi|T}^B = \mathbb{C}\delta_0 \bigoplus_{\dot{x} \in X} S_{T,\dot{x}}$$

et que, pour $\dot{x} \in k''/B \setminus \{0\}$, l'application $\mathcal{I}_{T,\dot{x}}$ est un isomorphisme de T -modules de $\mathcal{H}_{T,\dot{x}}$ sur le sous-espace de \mathcal{H}_{ψ}^B constitué des fonctions à support dans la T -orbite de \dot{x} . De plus, on a

$$S_{T,\dot{x}} = \bigoplus_{\substack{\chi \in \hat{T} \\ \chi|_{T(\dot{x})} = \chi_{\dot{x}}}} \chi.$$

Il suit de ces considérations que les caractères qui interviennent dans $S_{\psi|T}^B$ sont, outre le caractère trivial, ceux de conducteur $2j > 0$ dont la restriction à T_j est de la forme $\chi_{aa^{\tau}, 2j, j}$ (resp. $\chi_{aa^{\tau}, j, [\frac{j}{2}]}$) avec $a \in \mathcal{O}''^{\times}$ si k'' n'est pas ramifié sur k' (resp. k'' est ramifié sur k').

Maintenant soit $\chi \in \hat{T}$ un caractère de conducteur $2j > 0$ et $a \in \mathcal{O}''^{\times}$ tels que $\chi|_{T_j} = \chi_{aa^{\tau}, 2j, j}$ (resp. $\chi|_{T_j} = \chi_{aa^{\tau}, j, [\frac{j}{2}]}$) si k'' n'est pas ramifié sur k' (resp. k'' est ramifié sur k'). Soit $x = \varpi''^{\lambda-j}a \in k'' \setminus B$. Soit $\varphi \in \mathcal{H}_{T,\dot{x}}$ la fonction de support inclus dans T_j telle que $\varphi(1) = 1$. Alors la fonction φ_{χ} définie par

$$\varphi_{\chi} = \sum_{g \in T/T_j} \chi(g^{-1}) S_{T,\dot{x}}(g) \varphi,$$

est, à un scalaire multiplicatif près, l'unique vecteur de poids χ de la représentation $S_{T,\dot{x}}$. Or, on a clairement

$$\mathcal{I}_{T,\dot{x}}\varphi = \delta_x.$$

Par suite, la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{T,\dot{x}}\varphi_{\chi} &= \sum_{g \in T/T_j} \chi(g^{-1}) S_{\psi}^B(g) \delta_x \\ &= \sum_{g \in T/T_j} \chi(g^{-1}) \delta_{gx} \\ &= \sum_{g \in T/T_j} \chi(g^{-1}) \delta_{\varpi''^{\lambda-j}ga} \end{aligned}$$

est un vecteur de poids χ de la représentation $S_{\psi|T}^B$.

Enfin, si k'' n'est pas ramifié sur k' , $N_{k''/k'}$ est un morphisme surjectif de groupes de \mathcal{O}''^\times sur \mathcal{O}'^\times . On en déduit que si $\chi \in \hat{T}$ est un caractère de conducteur $2j > 0$, il existe $a \in \mathcal{O}''^\times$ tels que $\chi|_{T_j} = \chi_{aa^\tau, 2j, j}$. ■

6.7 On conserve les notations introduites au tout début du paragraphe précédent, mais on se place dans la situation où k'' n'est pas ramifié sur k' et μ est impair. Alors $B = \varpi'^{\frac{\mu+1}{2}} \mathcal{O}''$ est un bon réseau T -invariant dont le réseau dual est $B^* = \varpi'^{\frac{\mu-1}{2}} \mathcal{O}''$. De plus $A = \varpi'^{\frac{\mu-1}{2}} (\mathcal{O}' + \mathcal{O}' \varpi' \nu)$ est un réseau autodual tel que $B \subset A \subset B^*$. On considère la représentation de Weil S_ψ^A dans l'espace \mathcal{H}_ψ^A . On rappelle le caractère η_0 de T défini au paragraphe 6.5 par la formule 6.2.

Théorème 6.7.1 a) *Un caractère χ de conducteur au plus 1 de T intervient dans la représentation S_ψ^A si et seulement si $\chi \neq \eta_0$. Dans ce cas, il existe $v \in B^*$ tel que la fonction*

$$\varphi_\chi = \sum_{g \in T/T_1} \chi(g^{-1}) S_\psi^A(g) \delta_v \quad (6.9)$$

soit non nulle et engendre le sous-espace des vecteurs de poids χ de \mathcal{H}_ψ^A .

b) (i) *Un caractère χ de conducteur strictement supérieur à 1 de T intervient dans la représentation S_ψ^A si et seulement si son conducteur est impair.*

(ii) *Soit χ un caractère de T de conducteur impair $2j + 1 > 1$. Alors, il existe $a \in \mathcal{O}''^\times \setminus (\varpi' \mathcal{O}' + \mathcal{O}' \nu)$ tel que*

$$\chi|_{T_{j+1}} = \chi_{aa^\tau, 2j+1, j+1}$$

et le sous-espace des vecteurs de poids χ de \mathcal{H}_ψ^A est engendré par la fonction

$$\varphi_\chi = \sum_{g \in T/T_{j+1}} \chi(g^{-1}) S_\psi^A(g) \delta_{\varpi'^{\frac{\mu-1}{2}-j} a}. \quad (6.10)$$

Démonstration : D'après le théorème 6.1.1, on sait déjà que les caractères de T interviennent tous sans multiplicité. Il suffit donc de montrer que les seuls caractères qui interviennent sont ceux indiqués, avec les fonctions propres correspondantes.

On réalise la représentation de Weil S_ψ^- de $Sp(\mathfrak{b}^*)$ dans l'espace \mathcal{H}_ψ^x où $x = A/B$. Cet espace s'identifie naturellement via l'application $\varphi \mapsto \varphi \circ p_{\mathfrak{b}^*}$, au sous-espace K_B -invariant \mathcal{E}_0^B de \mathcal{H}_ψ^A constitué des fonctions à support dans B^* (en particulier, une base de \mathcal{H}_ψ^x est constituée des fonctions δ_v , v parcourant un système de représentants dans B^* de B^*/A). Dans ces conditions la représentation \tilde{S}_ψ^- est la représentation de K_B dans \mathcal{E}_0^B induite par S_ψ^A .

On pose $\lambda = \frac{\mu-1}{2}$. Soit $x \in k''$ tel que $v''(x) \leq \lambda$, \dot{x} son image dans k''/B , \ddot{x} celle dans k''/A et \hat{x} celle dans k''/B^* . On désigne par $\sigma_{T, \hat{x}}$ la restriction au stabilisateur $T(\hat{x})$ de

\hat{x} dans T de la représentation $\sigma_{\hat{x}}$ de $K_B(\hat{x})$ dans \mathcal{H}_{ψ}^x définie par la formule 5.6. Soit $S_{T,\hat{x}}$ la représentation de T définie par

$$S_{T,\hat{x}} = \text{Ind}_{T(\hat{x})}^T \sigma_{T,\hat{x}}.$$

L'espace $\mathcal{H}_{T,\hat{x}}$ de cette représentation est l'espace des fonctions $\varphi : T \rightarrow \mathcal{H}_{\psi}^x$ qui vérifient $\varphi(gt) = \sigma_{T,\hat{x}}(t)\varphi(g)$, $g \in T$, $t \in T(\hat{x})$. Si $\varphi \in \mathcal{H}_{T,\hat{x}}$, il existe un unique élément $\mathcal{I}_{T,\hat{x}}\varphi$ de \mathcal{H}_{ψ}^B , de support contenu dans la T -orbite de \hat{x} et vérifiant

$$\mathcal{I}_{T,\hat{x}}\varphi(g.x) = \tilde{S}_{\psi}(g)\varphi(g^{-1}), \quad g \in T. \quad (6.11)$$

Soit $X \subset k'' \backslash B^*$ un ensemble de représentants des orbites de T dans $k''/B^* \backslash \{0\}$. Il résulte des lemmes 5.4.1 et 3.4.1 que l'on a

$$S_{\psi|T}^B = \tilde{S}_{\psi|T} \bigoplus_{x \in X} S_{T,\hat{x}}$$

et que, pour $x \in X \cup \{0\}$, l'application $\mathcal{I}_{T,\hat{x}}$ est un isomorphisme de T -modules de $\mathcal{H}_{T,\hat{x}}$ sur le sous-espace $\mathcal{G}_{\hat{x}}$ de \mathcal{H}_{ψ}^B constitué des fonctions à support dans la T -orbite de \hat{x} . On en déduit évidemment que

$$S_{\psi|T}^A = \tilde{S}_{\psi|T} \bigoplus_{x \in X} S_{T,\hat{x}} \quad (6.12)$$

l'application $\mathcal{I}_{A,B} \circ \mathcal{I}_{T,\hat{x}}$ étant, pour tout $x \in X \cup \{0\}$, un isomorphisme de T -modules de $\mathcal{H}_{T,\hat{x}}$ sur le sous-espace $\mathcal{E}_{\hat{x}}$ de \mathcal{H}_{ψ}^A constitué des fonctions à support dans la T -orbite de \hat{x} .

L'image de $\varpi'\mathcal{O}' + \mathcal{O}'\nu = \varpi'^{-\frac{\mu-1}{2}}A\nu$ dans $\mathbb{F}_{q''}$ étant $\mathbb{F}_{q'}p_{\mathbb{F}_{q''}}(\nu)$, on voit que la T -orbite de tout élément de \mathcal{O}''^{\times} rencontre $\mathcal{O}''^{\times} \backslash (\varpi'\mathcal{O}' + \mathcal{O}'\nu)$. On peut donc supposer que $X \subset k'^{\times}(\mathcal{O}''^{\times} \backslash (\varpi'\mathcal{O}' + \mathcal{O}'\nu))$.

Soit $x \in X$. Écrivons $x = \varpi^{v''(x)}a$ avec $v''(x) < \lambda$ et $a \in \mathcal{O}''^{\times} \backslash (\varpi'\mathcal{O}' + \mathcal{O}'\nu)$. Alors le stabilisateur $T(\hat{x})$ de \hat{x} dans T est le sous-groupe de congruence T_j avec $j = \lambda - v''(x)$ tandis que celui $T(\dot{x})$ de \dot{x} est T_{j+1} .

La représentation $\sigma_{T,\hat{x}}$ de $T(\hat{x})$ dans \mathcal{H}_{ψ}^x est donnée par

$$\sigma_{T,\hat{x}}(g) = \psi\left(\frac{1}{2}\beta(gx, x)\right)\tilde{\rho}_{\psi}(g^{-1}x - x), \quad g \in T(\hat{x}). \quad (6.13)$$

D'autre part, le groupe $T(\hat{x})$ laisse stable le réseau autodual A et il opère donc dans le quotient k''/A . On désigne par $T(\ddot{x})$ le stabilisateur de \ddot{x} dans $T(\hat{x})$. Alors, on a

$$T(\ddot{x}) = T(\dot{x}) = T_{j+1}.$$

En effet, il est clair que $T(\dot{x}) \subset T(\ddot{x})$. Réciproquement, soit $g \in T(\hat{x})$ tel que $g(x+A) = x+A$. Alors, on a $g = 1 + \varpi'^{2j}\xi + \varpi'^j\eta\nu$, avec $\xi, \eta \in \mathcal{O}'$. Par hypothèse $x = \varpi'^{\lambda-j}(u+v\nu)$ avec $u \in \mathcal{O}'^{\times}$ et $v \in \mathcal{O}'$. La condition $g\ddot{x} = \ddot{x}$ s'écrit $(g-1)(u+v\nu) \in \varpi'^j(\mathcal{O}' + \mathcal{O}'\varpi'\nu)$

qui, après calcul, entraîne $u\eta + \varpi'^j v\xi \in \varpi' \mathcal{O}'$. Comme u est dans \mathcal{O}'^\times et $j > 0$, on en déduit que $\eta \in \varpi' \mathcal{O}'$ et donc que $g \in T_{j+1}$.

Cela dit, si $g \in T(\dot{x})$, on a

$$xgx^{-1} = g(g^{-1}x - x, \frac{1}{2}\beta(x, g^{-1}x)) \in K'_B B(0, \frac{1}{2}\beta(x, g^{-1}x)).$$

On en déduit que la restriction de la représentation $\sigma_{T,\dot{x}}$ à $T(\dot{x})$ est un multiple du caractère $\chi_{\dot{x}} = \chi_{aa^\tau, 2j+1, j+1}$; en fait, on a $(\sigma_{T,\dot{x}})|_{T(\dot{x})} = q' \chi_{\dot{x}}$.

Nous allons voir que la représentation $\sigma_{T,\dot{x}}$ est équivalente à la représentation $\gamma_{\dot{x}} = \text{Ind}_{T(\dot{x})}^{T(\hat{x})} \chi_{\dot{x}}$.

On définit un opérateur $T(\hat{x})$ -équivariant $\mathcal{I}_{\dot{x}}$ de l'espace $\mathcal{H}_{\dot{x}}$ de $\gamma_{\dot{x}}$ dans $\mathcal{H}_{\dot{x}}^\times$ en posant pour $\varphi \in \mathcal{H}_{\dot{x}}$

$$\mathcal{I}_{\dot{x}}\varphi = \sum_{t \in T(\hat{x})/T(\dot{x})} \varphi(t) \sigma_{T,\dot{x}}(t^{-1}) \delta_0. \quad (6.14)$$

Comme $T(\hat{x})/T(\dot{x}) = T_j/T_{j+1}$ est de cardinal q' , les espaces $\mathcal{H}_{\dot{x}}$ et $\mathcal{H}_{\dot{x}}^\times$ ont même dimension. Il nous suffit donc de montrer que $\mathcal{I}_{\dot{x}}$ est injectif. Soit donc $\varphi \in \mathcal{H}_{\dot{x}}$ tel que $\mathcal{I}_{\dot{x}}\varphi = 0$. Or, il suit des formules 6.13 et 3.1 que, pour $t \in T(\hat{x})$, $\sigma_{T,\dot{x}}(t^{-1})\delta_0$, vu comme un élément de $\mathcal{H}_{\dot{x}}^A$ est à support dans $(t^{-1}x - x) + A$. On voit donc que, si $t, t' \in T(\hat{x})$, $\sigma_{T,\dot{x}}(t^{-1})\delta_0$ et $\sigma_{T,\dot{x}}(t'^{-1})\delta_0$ ont des supports disjoints sauf si $t^{-1}x + A = t'^{-1}x + A$, c'est à dire si $t\ddot{x} = t'\ddot{x}$. Ce qui équivaut à $tt'^{-1} \in T(\dot{x})$. Ceci montre que le système de vecteurs $\sigma_{T,\dot{x}}(t^{-1})\delta_0$, t parcourant un ensemble de représentants dans $T(\hat{x})$ du quotient $T(\hat{x})/T(\dot{x})$, est libre. Il suit alors de 6.14 que $\varphi = 0$ comme voulu.

Il suit donc du théorème d'induction par étages que

$$S_{T,\dot{x}} = \text{Ind}_{T(\dot{x})}^T \chi_{\dot{x}}.$$

On en déduit que la représentation $S_{T,\dot{x}}$ se décompose en la somme directe sans multiplicité des caractères de T dont la restriction à $T(\dot{x})$ est $\chi_{aa^\tau, 2j+1, j+1}$. Désignons par $\mathcal{G}_{T,\dot{x}}$ l'espace de la représentation $\text{Ind}_{T(\dot{x})}^T \chi_{\dot{x}}$ et soit ϕ_0 l'élément de $\mathcal{G}_{T,\dot{x}}$ de support $T(\dot{x})$ et tel que $\phi_0(1) = 1$. Si χ est un caractère de T dont la restriction à $T(\dot{x})$ est $\chi_{aa^\tau, 2j+1, j+1}$, on désigne par ϕ_χ la fonction définie sur T par

$$\phi_\chi(g) = \sum_{t \in T/T(\dot{x})} \chi(t^{-1}) \phi_0(gt), \quad g \in T.$$

Alors ϕ_χ est un élément non nul de $\mathcal{G}_{T,\dot{x}}$ engendrant le sous-espace des vecteurs de poids χ .

D'autre part, si $\phi \in \mathcal{G}_{T,\dot{x}}$, on définit la fonction $\tilde{\phi}$ à valeurs dans $\mathcal{H}_{\dot{x}}$ en posant

$$\tilde{\phi}(g)(t) = \phi(gt), \quad g \in T, \quad t \in T(\hat{x}).$$

Alors l'application $\phi \mapsto \tilde{\phi}$, est un isomorphisme T -équivariant de $\mathcal{G}_{T,\hat{x}}$ sur l'espace de la représentation $\text{Ind}_{T(\hat{x})}^T(\text{Ind}_{T(\hat{x})}^{T(\hat{x})} \chi_{\hat{x}})$. On définit un isomorphisme T -équivariant $\mathcal{J}_{T,\hat{x}}$ de $\mathcal{G}_{T,\hat{x}}$ sur $\mathcal{H}_{T,\hat{x}}$ en posant pour $\phi \in \mathcal{G}_{T,\hat{x}}$

$$\mathcal{J}_{T,\hat{x}}\phi(g) = \mathcal{I}_{\hat{x}}(\tilde{\phi}(g)), g \in T.$$

On vérifie que $\mathcal{J}_{T,\hat{x}}\phi_0$ est l'élément φ_0 de $\mathcal{H}_{T,\hat{x}}$ de support $T(\hat{x})$ et tel que $\varphi_0(1) = \delta_0$.

L'application $\mathcal{K}_{T,\hat{x}} = \mathcal{I}_{A,B} \circ \mathcal{I}_{T,\hat{x}} \circ \mathcal{J}_{T,\hat{x}}$ est une injection T -équivariante de $\mathcal{G}_{T,\hat{x}}$ dans \mathcal{H}_{ψ}^A dont l'image est le sous-espace $\mathcal{E}_{\hat{x}}$ des fonctions à support dans l'orbite de \hat{x} sous T . On vérifie que

$$\mathcal{K}_{T,\hat{x}}\phi_0 = \delta_x.$$

En effet, il suit de la relation 6.11 que $\mathcal{I}_{T,\hat{x}} \circ \mathcal{J}_{T,\hat{x}}\phi_0$ est l'élément θ de \mathcal{H}_{ψ}^B supporté par \hat{x} et vérifiant $\theta(x) = \delta_0$. On en déduit que $\mathcal{K}_{T,\hat{x}}\phi_0 = \mathcal{I}_{A,B}\theta$ est un élément de \mathcal{H}_{ψ}^A supporté par \hat{x} et vérifiant, pour tout $b \in B^*$,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{A,B}\theta(x+b) &= \theta(x+b)(0) \\ &= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(x,b)\right)\tilde{\rho}_{\psi}(b)(\delta_0)(0) \\ &= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(x,b)\right)\delta_0(b). \end{aligned}$$

Notre assertion est alors claire.

Maintenant soit χ un caractère de T tel que $\chi|_{T(\hat{x})} = \chi_{aa^{\tau}, 2j+1, j+1}$. Désignons par φ_{χ} l'image de ϕ_{χ} par $\mathcal{K}_{T,\hat{x}}$. Il est clair que φ_{χ} est un vecteur non nul de poids χ dans \mathcal{H}_{ψ}^A pour l'action de T et qu'il vérifie la relation 6.10.

Comme $N_{k''/k'}$ est un morphisme surjectif de groupes de \mathcal{O}''^{\times} sur \mathcal{O}'^{\times} et comme toute T -orbite dans \mathcal{O}''^{\times} rencontre $\mathcal{O}''^{\times} \setminus (\varpi' \mathcal{O}' + \mathcal{O}'\nu)$, on voit que les caractères de conducteur impair $2j+1$, $j > 0$, de T sont exactement les caractères dont la restriction à T_{j+1} est de la forme $\chi_{aa^{\tau}, 2j+1, j+1}$ avec $a \in \mathcal{O}''^{\times} \setminus (\varpi' \mathcal{O}' + \mathcal{O}'\nu)$.

Nous avons donc démontré que chaque caractère d'indice impair strictement supérieur à 1 apparaît avec la multiplicité 1 dans \mathcal{H}_{ψ}^A et qu'une fonction propre correspondante est celle donnée dans l'énoncé du théorème. Nous avons également montré que la somme directe des sous-espaces propres correspondants est égale à

$$\bigoplus_{x \in X} S_{T,\hat{x}}.$$

Compte tenu de la relation 6.12, il nous suffit donc, pour achever la démonstration du théorème, de montrer que les seuls caractères de T qui apparaissent dans \mathcal{E}_0^B sont les caractères de conducteur au plus 1, à l'exclusion du caractère η_0 .

Comme l'action de K_B dans \mathcal{E}_0^B passe au quotient en la représentation de Weil S_{ψ}^x de $Sp(b^*)$, les caractères de T qui apparaissent sont des caractères qui passent au quotient

à $T/T_1 = \mu_{q'+1}$, donc de conducteur au plus 1. Comme ces caractères apparaissent avec au plus la multiplicité 1 alors que la représentation de Weil est de dimension q' , on voit qu'ils apparaissent tous sauf l'un d'entre eux, que l'on note η_0 et que nous allons déterminer. Compte tenu de ce qui précède, il est clair que l'on a

$$\eta_0(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in T_1 \\ -\text{tr } S_{\psi}^{\mathbf{x}}(p_{Sp(\mathbf{b}^*)}(g)) & \text{si } g \in T \setminus T_1. \end{cases} \quad (6.15)$$

Nous devons donc calculer la restriction du caractère de la représentation $\tilde{S}_{\psi}^{\mathbf{x}}$ au tore T . Pour ce faire, nous allons commencer par décrire les opérateurs $S_{\psi}^{\mathbf{x}}(p_{Sp(\mathbf{b}^*)}(g)) = \tilde{S}_{\psi}^{\mathbf{x}}(g)$, $g \in T$. En fait ces opérateurs sont la restriction des opérateurs $S_{\psi}^A(g)$, $g \in T$ au sous-espace \mathcal{E}_0^B .

Dans la suite, si x est un élément de k'' (resp. \mathcal{O}''), on désigne par \dot{x} son image dans k''/B (resp. $\mathbb{F}_{q''}$). On identifie $\mathbf{b}^* = B^*/B$ avec $\mathbb{F}_{q''}$ au moyen de l'application $\dot{x} \mapsto p_{\mathbb{F}_{q''}}(\varpi'^{\frac{1-\mu}{2}}x)$.

On choisit des bases e_1, \dots, e_r et f_1, \dots, f_r de \mathcal{O}' sur \mathcal{O} telles que

$$\varpi'^{\frac{\mu-1}{2}}e_1, \dots, \varpi'^{\frac{\mu-1}{2}}e_r, \varpi'^{\frac{\mu+1}{2}}f_1\nu, \dots, \varpi'^{\frac{\mu+1}{2}}f_r\nu$$

soit une base autoduale de k'' sur k et que $\dot{e}_1, \dots, \dot{e}_l$, où $l = \frac{r}{e}$, soit une base de $\mathbb{F}_{q'}$ sur \mathbb{F}_q . On vérifie alors que $\dot{f}_1, \dots, \dot{f}_l$ est également une base de $\mathbb{F}_{q'}$ sur \mathbb{F}_q et que $\dot{e}_1, \dots, \dot{e}_l, \dot{f}_1\nu, \dots, \dot{f}_l\nu$ est une base symplectique de $\mathbb{F}_{q''} = \mathbf{b}^*$ pour la forme symplectique $\beta_{\mathbf{b}^*}$. De plus, $\dot{e}_1, \dots, \dot{e}_l$ est une base du lagrangien $\mathbf{x} = \mathbb{F}_{q'}$ dont le sous-espace $\mathbf{y} = \mathbb{F}_{q'}\nu$ de \mathbf{b}^* , engendré par $\dot{f}_1\nu, \dots, \dot{f}_l\nu$, est un supplémentaire lagrangien.

Dans la suite, on identifie $\mathbb{F}_{q'}^2$ avec $\mathbf{b}^* = \mathbb{F}_{q''}$ au moyen de l'application $(x, y) \mapsto x + y\nu$ et on écrit tout endomorphisme \mathbb{F}_q -linéaire de \mathbf{b}^* sous forme matricielle $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ avec x, y, z et t des endomorphismes \mathbb{F}_q -linéaires de $\mathbb{F}_{q'}$.

L'application $\gamma : \mathcal{O}' \longrightarrow \mathbb{F}_q$ définie par

$$\gamma(x) = p_{\mathbb{F}_q}(\varpi^{1-\lambda_{\psi}} \text{tr}_{k'/k} \varpi'^{\mu-1+v''(u)}x)$$

passé au quotient en une forme \mathbb{F}_q -linéaire non nulle sur $\mathbb{F}_{q'}$. Il existe donc $\gamma_0 \in \mathbb{F}_{q'}^{\times}$ tel que

$$\gamma(x) = \text{tr}_{\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q} \gamma_0 \dot{x}, \quad x \in \mathcal{O}'. \quad (6.16)$$

Cela étant, la forme symplectique $\beta_{\mathbf{b}^*}$ induit une dualité entre les sous-espaces lagrangiens \mathbf{x} et \mathbf{y} et donc une dualité du \mathbb{F}_q -espace vectoriel $\mathbb{F}_{q'}$ sur lui-même, donnée par

$$\langle x, y \rangle = \beta_{\mathbf{b}^*}(x, y\nu), \quad x, y \in \mathbb{F}_{q'}.$$

Utilisant les définitions 6.1 de β et 2.3 de $\beta_{\mathbf{b}^*}$ et compte tenu de la formule 6.16, on vérifie que cette dualité est une forme bilinéaire symétrique donnée par

$$\langle x, y \rangle = \text{tr}_{\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q} \gamma_0 \dot{d}xy, \quad x, y \in \mathbb{F}_{q'}. \quad (6.17)$$

Si a est un \mathbb{F}_q -endomorphisme de $\mathbb{F}_{q'}$, on désigne par ${}^t a$ son adjoint relativement à la forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors, un endomorphisme $g = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ est un élément de $Sp(\mathbf{b}^*)$ si et seulement si

$${}^t xz = {}^t zx, \quad {}^t yt = {}^t ty \text{ et } {}^t xt - {}^t zy = Id.$$

Soit $\varsigma_{\mathbf{b}^*}$ l'image de ς_B par le morphisme $p_{Sp(\mathbf{b}^*)}$. Alors, on a $\varsigma_{\mathbf{b}^*} = \begin{pmatrix} 0 & -v^{-1} \\ v & 0 \end{pmatrix}$ où v est l'endomorphisme de $\mathbb{F}_{q'}$ tel que $v(\dot{e}_i) = -\dot{f}_i$, $1 \leq i \leq l$. Cet endomorphisme vérifie ${}^t v = v$, puisque $\dot{f}_1, \dots, \dot{f}_l$ est la base duale de la base $\dot{e}_1, \dots, \dot{e}_l$, relativement à la forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

De même, si $g = x + y\nu \in T$, on voit que, comme endomorphisme de $\mathbb{F}_{q''}$ agissant par multiplication, $\dot{g} = \begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{d}y \\ \dot{y} & \dot{x} \end{pmatrix}$.

Si $s \in \mathcal{O}'$, la fonction $\delta_{\varpi^{\frac{\mu-1}{2}} s \nu}$ ne dépend que de $\dot{s} \in \mathbb{F}_{q'}$ et on la note φ_s . Alors, les φ_s , $s \in \mathbb{F}_{q'}$, forment une base de l'espace \mathcal{E}_0^B . On rappelle que ω désigne l'indice de Weil relatif au caractère $\frac{1}{2}\overline{\psi}$ du corps \mathbb{F}_q . On désigne par ω' l'indice de Weil relatif au caractère $\frac{1}{2}\overline{\psi} \circ \text{tr}_{\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q}$ du corps $\mathbb{F}_{q'}$.

Lemme 6.7.1 a) On a

$$S_{\psi}^A(-1)\varphi_s = \left(\frac{-1}{q'}\right)\varphi_{-s}, \quad s \in \mathbb{F}_{q'}. \quad (6.18)$$

b) Soit $g \in T$ tel que $\dot{g} \neq \pm 1$. Si l'on écrit $g = x + y\nu$, avec $x, y \in \mathcal{O}'$ tels que $x^2 - dy^2 = 1$, pour tout $s \in \mathbb{F}_{q'}$, on a

$$S_{\psi}^A(g)\varphi_s = q^{\frac{-l}{2}}\omega'(1)^{-1} \left(\frac{\gamma_0 \dot{d}y}{q'}\right) \sum_{t \in \mathbb{F}_{q'}} \overline{\psi}\left(\frac{1}{2} \text{tr}_{\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q} \gamma_0 \dot{d}y^{-1}(\dot{x}(s^2 + t^2) - 2st)\right)\varphi_t. \quad (6.19)$$

Démonstration : a) Cette assertion se déduit de la formule 4.20 du corollaire 4.5.1 et de ce que $\left(\frac{(-1)^l}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q'}\right)$.

b) On vérifie que $g = p_1 \varsigma_B p_2$, avec $p_1, p_2 \in P_B$ tels que

$$p_{Sp(\mathbf{b}^*)}(p_1) = \begin{pmatrix} \dot{y}^{-1}v & \dot{x}v^{-1} \\ 0 & \dot{y}v^{-1} \end{pmatrix} \text{ et } p_{Sp(\mathbf{b}^*)}(p_2) = \begin{pmatrix} 1 & \dot{y}^{-1}\dot{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Grâce aux formules 4.20 et 4.21, on en déduit que

$$S_\psi^A(g) = \left(\frac{-1}{q}\right)^l \omega(1)^{-l} q^{\frac{l}{2}} \left(\frac{\det \dot{y}^{-1}v}{q}\right) M_A(p_1) M_A(\varsigma_B) M_A(p_2). \quad (6.20)$$

Commençons par calculer $\left(\frac{\det \dot{y}^{-1}v}{q}\right)$. Soit $\dot{e}_1^*, \dots, \dot{e}_l^*$ la base de $\mathbb{F}_{q'}$ sur \mathbb{F}_q duale de la base $\dot{e}_1, \dots, \dot{e}_l$ pour la forme quadratique $x \mapsto \text{tr}_{\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q} x^2$. On a $\dot{e}_i^* = \gamma_0 \dot{d}f_i$, de sorte que $v\dot{e}_i = -(\gamma_0 \dot{d})^{-1} \dot{e}_i^*$, $1 \leq i \leq l$. Soit $\Delta(\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q)$ le discriminant de $\mathbb{F}_{q'}$ sur \mathbb{F}_q . D'après le théorème de parité de Stickelberger (voir [19]), on a

$$\left(\frac{\Delta(\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q)}{q}\right) = (-1)^{l-1}.$$

On déduit alors de ce qui précède que

$$\det \dot{y}^{-1}v \equiv (-1)^l N_{\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q}(\gamma_0 \dot{d}\dot{y})^{-1} \Delta(\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q) \pmod{(\mathbb{F}_q^\times)^2}.$$

Mais alors, on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\det \dot{y}^{-1}v}{q}\right) &= \left(\frac{N_{\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q}(\gamma_0 \dot{d}\dot{y})}{q}\right) \left(\frac{-1}{q}\right)^l \left(\frac{\Delta(\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q)}{q}\right) \\ &= (-1)^{l-1} \left(\frac{\gamma_0 \dot{d}\dot{y}}{q'}\right) \left(\frac{-1}{q}\right)^l. \end{aligned}$$

Reportant cette égalité dans la formule 6.20 et tenant compte tenu de la relation de Hasse-Davenport (voir [22, paragraphe 18] et aussi [15])

$$-\omega'(1) = (-\omega(1))^l$$

il vient

$$S_\psi^A(g) = \omega'(1)^{-1} q^{\frac{l}{2}} \left(\frac{\gamma_0 \dot{d}\dot{y}}{q'}\right) M_A(p_1) M_A(\varsigma_B) M_A(p_2). \quad (6.21)$$

Maintenant, nous allons calculer l'action des opérateurs $M_A(p_2)$, $M_A(\varsigma_B)$ et $M_A(p_1)$ dans \mathcal{E}_0^B .

Si $s \in \mathcal{O}'$, on a $p_2 \varpi'^{\frac{\mu-1}{2}} s\nu \in \varpi'^{\frac{\mu-1}{2}} (s\nu + y^{-1}xs) + B$. Compte tenu de la formule 4.10, il vient

$$\begin{aligned} M_A(p_2)\varphi_s &= \psi\left(\frac{1}{2}\beta(\varpi'^{\frac{\mu-1}{2}}y^{-1}xs, \varpi'^{\frac{\mu-1}{2}}s\nu)\right)\varphi_s \\ &= \psi\left(\frac{1}{2}\text{tr}_{k'/k}\varpi'^{\mu-1+v''(u)}dy^{-1}xs^2\right)\varphi_s \\ &= \overline{\psi}(p_{\mathbb{F}_q}\left(\frac{1}{2}\varpi^{1-\lambda_\psi}\text{tr}_{k'/k}\varpi'^{\mu-1+v''(u)}dy^{-1}xs^2\right))\varphi_s. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que, pour tout $s \in \mathbb{F}_{q'}$, on a

$$M_A(p_2)\varphi_s = \overline{\psi}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr}_{\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q} \gamma_0 \dot{y}^{-1} \dot{x} s^2\right) \varphi_s. \quad (6.22)$$

Si $s \in \mathbb{F}_{q'}$, on désigne par \tilde{s} un de ses représentants dans \mathcal{O}' . Soit donc $s \in \mathbb{F}_{q'}$. Alors, on a $p_1 \varpi'^{\frac{\mu-1}{2}} \tilde{s} \nu \in \varpi'^{\frac{\mu-1}{2}} ((\dot{x} v^{-1} s)^\sim + (\dot{y} v^{-1} s)^\sim \nu) + B$. Comme pour $M_A(p_2)$, on en déduit que

$$M_A(p_1)\varphi_s = \overline{\psi}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr}_{\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q} \gamma_0 \dot{x} \dot{y} (v^{-1} s)^2\right) \varphi_{\dot{y} v^{-1} s}. \quad (6.23)$$

Pour calculer l'action de $M_A(\varsigma_B)$, on commence par remarquer que $\varsigma_B A = A\nu$ et $A \cap \varsigma_B A = B = B\nu$ de sorte que le groupe quotient $\varsigma_B A / A \cap \varsigma_B A$ est isomorphe à $\mathbb{F}_{q'} = A/B$, l'isomorphisme étant donné par l'application $t \mapsto \varpi'^{\frac{\mu-1}{2}} \tilde{t} \nu + B$. De plus, pour $t \in \mathbb{F}_{q'}$, on a

$$\begin{aligned} \varsigma_B(\varpi'^{\frac{\mu-1}{2}} \tilde{t} \nu + B) &= -\varpi'^{\frac{\mu-1}{2}} (v^{-1} t)^\sim + B \\ \varsigma_B^{-1}(\varpi'^{\frac{\mu-1}{2}} \tilde{t} \nu + B) &= \varpi'^{\frac{\mu-1}{2}} (v^{-1} t)^\sim + B. \end{aligned}$$

Utilisant le lemme 4.4.1, on en déduit que, pour $s \in \mathbb{F}_{q'}$,

$$M_A(\varsigma_B)\varphi_s = q^{-l} \sum_{t \in \mathbb{F}_{q'}} \overline{\psi}\left(-\frac{1}{2} \operatorname{tr}_{\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q} \gamma_0 \dot{d}(s v^{-1} t + t v^{-1} s)\right) \varphi_t. \quad (6.24)$$

Soit $s \in \mathbb{F}_{q'}$. Comme v est un endomorphisme de $\mathbb{F}_{q'}$ symétrique relativement à la forme $\langle x, y \rangle = \operatorname{tr}_{\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q} \gamma_0 \dot{d} x y$, on déduit des relations 6.22, 6.23 et 6.24 que

$$\begin{aligned} M_A(p_1) M_A(\varsigma_B) M_A(p_2) \varphi_s &= q^{-l} \sum_{t \in \mathbb{F}_{q'}} \overline{\psi}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr}_{\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q} \gamma_0 \dot{d} (\dot{y}^{-1} \dot{x} s^2 - 2 s v^{-1} t + \dot{x} \dot{y} (v^{-1} t)^2)\right) \varphi_{\dot{y} v^{-1} t} \\ &= q^{-l} \sum_{t \in \mathbb{F}_{q'}} \overline{\psi}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr}_{\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q} \gamma_0 \dot{d} \dot{y}^{-1} (\dot{x} (s^2 + t^2) - 2 s t)\right) \varphi_t. \end{aligned}$$

Notre lemme en résulte, compte tenu des formules 6.20 et 6.21. ■

Il résulte des relations 6.15 et 6.18 que

$$\eta_0(-1) = -\left(\frac{-1}{q'}\right) = \left(\frac{-d}{q'}\right). \quad (6.25)$$

D'autre part, soit $g \in T$ tel que $\dot{g} \neq \pm 1$. Écrivons $g = x + y\nu$ avec $x, y \in \mathcal{O}'$ tels que $x^2 - dy^2 = 1$. Il suit de la formule 6.19 que, pour $t \in \mathbb{F}_{q'}$, on a

$$\langle S_\psi^A(g)\varphi_t, \varphi_t \rangle = q^{-\frac{1}{2}}\omega'(1)^{-1} \left(\frac{\gamma_0 \dot{d}\dot{y}}{q'} \right) \overline{\psi}(\mathrm{tr}_{\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q} \gamma_0 \dot{d} \frac{\dot{x}-1}{\dot{y}} t^2).$$

Compte tenu des formules 3.9, 3.8 et 6.15 et de [17, Proposition A.9 (1)], on en déduit que

$$\begin{aligned} \eta_0(g) &= -q^{-\frac{1}{2}}\omega'(1)^{-1} \left(\frac{\gamma_0 \dot{d}\dot{y}}{q'} \right) \sum_{t \in \mathbb{F}_{q'}} \overline{\psi}(\mathrm{tr}_{\mathbb{F}_{q'}/\mathbb{F}_q} \gamma_0 \dot{d} \frac{\dot{x}-1}{\dot{y}} t^2) \\ &= - \left(\frac{\gamma_0 \dot{d}\dot{y}}{q'} \right) \left(\frac{2\gamma_0 \dot{d}(\dot{x}-1)\dot{y}^{-1}}{q'} \right). \end{aligned}$$

Comme par ailleurs $\left(\frac{\dot{d}}{q'} \right) = -1$, il vient

$$\eta_0(g) = \left(\frac{2\dot{d}(\dot{x}-1)}{q'} \right). \quad (6.26)$$

On remarque que la formule 6.26 est encore valable lorsque $\dot{g} = -1$ (voir la formule 6.25) et même lorsque $\dot{g} = 1$, à condition dans ce cas de convenir que $\left(\frac{0}{q'} \right) = 1$.

Maintenant, soit $z = \xi + \zeta\nu \in \mathcal{O}''^\times$ tel que $g = z(z^{-1})^\tau$. Alors, on a

$$2\dot{d}(\dot{x}-1) = \frac{4\dot{d}^2\dot{\zeta}^2}{\dot{\xi}^2 - \dot{d}\dot{\zeta}^2}$$

de sorte que

$$\eta_0(g) = \left(\frac{\dot{\xi}^2 - \dot{d}\dot{\zeta}^2}{q'} \right) = \left(\frac{p_{\mathbb{F}_{q'}}(zz^\tau)}{q'} \right).$$

D'où le théorème, d'après la formule 6.2. ■

Remarque. Les théorèmes 6.6.1 et 6.7.1 ont été démontrés par Yang dans le cas où W est de dimension 2 (voir [23]).

6.8 Soit T un tore maximal elliptique de $Sp(W)$. Dans ce paragraphe, nous décrivons la restriction à T de la représentation de Weil de $Mp(W)$.

Rappelons que (voir le paragraphe 6.2) le T -module W se décompose de manière unique en somme directe orthogonale de sous- T -modules symplectiques et irréductibles sur k , $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$, que, pour $1 \leq i \leq n$, l'image T_i de T par l'application $x \mapsto x|_{W_i}$ est un tore maximal irréductible de $Sp(W_i)$ et que l'on identifie T avec le produit direct de tores $\prod_{i=1}^n T_i$ au moyen de l'isomorphisme $x \mapsto (x|_{W_1}, \dots, x|_{W_n})$.

Soit $1 \leq i \leq n$. On désigne par B_i le bon réseau T_i -invariant de W_i introduit dans le corollaire 6.4.1 et par s_i la restriction à T_i du relèvement s_{B_i} de K_{B_i} dans $Mp(W_i)$. On pose $A_i = B_i$ si le réseau B_i est autodual. Dans le cas contraire, A_i désigne le réseau autodual introduit au début du numéro 6.7 et vérifiant $B_i \subset A_i \subset B_i^*$.

Alors $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ est un bon réseau, $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ est un réseau autodual de W et ils vérifient $B \subset A \subset B^*$. De plus, B est stable sous l'action de T de sorte que $T \subset K_B$. On identifie T à un sous-groupe de $Mp(W)$ à l'aide de la section s_B de K_B dans $Mp(W)$.

On rappelle que si $\varphi_i \in \mathcal{H}_\psi^{A_i}$, $1 \leq i \leq n$, on a défini l'élément $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n$ de \mathcal{H}_ψ^A à l'aide de la formule 4.30

Théorème 6.8.1 (i) *Un caractère χ de T intervient dans la restriction à T de la représentation de Weil $S_{W,\psi}$ si et seulement si, pour chaque $1 \leq i \leq n$, le caractère $\chi|_{T_i}$ de T_i intervient dans restriction à T_i de la représentation de Weil $S_{W_i,\psi}$.*

(ii) *Soit χ un caractère de T vérifiant les conditions équivalentes du (i). Pour $1 \leq i \leq n$, on désigne par χ_i la restriction de χ à T_i et on choisit une fonction propre $\varphi_{\chi_i} \in \mathcal{H}_\psi^{A_i}$ de poids χ_i relativement à la restriction de la représentation de Weil $S_{W_i,\psi}$ à T_i . Alors*

$$\varphi_\chi := \varphi_{\chi_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\chi_n}$$

est une fonction propre de poids χ dans \mathcal{H}_ψ^A relativement à la restriction de la représentation de Weil $S_{W,\psi}$ à T .

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la proposition 4.7.1. ■

Remarque. Le théorème 6.8.1, combiné avec les théorèmes 6.6.1 et 6.7.1, permet de décrire explicitement la restriction de la représentation de Weil à un tore maximal elliptique donné de $Sp(W)$.

Références

- [1] F. BRUHAT et J. TITS – « Groupes réductifs sur un corps local, I, Données radicielles valuées », *Publ. Math.I.H.E.S.* **41** (1972), p. 5–251.
- [2] — , « Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local. Deuxième Partie : groupes unitaires », *Bull. soc. Math. France* **115** (1987), p. 141–195.
- [3] G. CLIFF, D. MCNEILLY et F. SZECHTMAN – « Weil representations of symplectic groups over rings », *J. London Math. Soc. (2)* **62** (2000), p. 423–436.
- [4] — , « Clifford and Mackey theory for Weil representations of symplectic groups », *J. Algebra* **262** (2003), p. 348–379.

- [5] M. DUFLO – « Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques », *Acta. Math.* **149** (1982), p. 153–213.
- [6] K. DUTTA et A. PRASAD – « Combinatorics of finite abelian groups and Weil representations », *arXiv :1010.3528v1* (2010), p. 1–24.
- [7] R. E. HOWE – « On the character of Weil’s representation », *Trans. Amer. Math. Soc.* **177** (1973), p. 287–298.
- [8] R. HOWE – « θ -series and invariant theory », *Automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. Sympos. Pure Math., no. XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, 1979, p. 275–285.
- [9] W. KLINGENBERG – « Symplectic groups over local rings », *Amer. J. Math.* **85** (1963), no. 2, p. 232–240.
- [10] G. LION et M. VERGNE – *The Weil representation, Maslov index and theta series*, Progress in Math., vol. 6, Birkhäuser, Boston, Basle, Stuttgart, 1980.
- [11] C. MOEGLIN, M.-F. VIGNÉRAS et J.-L. WALDSPURGER – *Correspondance de Howe sur un corps p -adique*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1291, Springer-Verlag, 1987.
- [12] C. C. MOORE – « Group extensions of p -adic and adelic linear groups », *Publ. Math. I.H.E.S.* **35** (1968), p. 5–70.
- [13] L. MORRIS – « Some tamely ramified supercuspidal representations of symplectic groups », *Proc. London Math. Soc. (3)* **63** (1991), p. 519–551.
- [14] S.-Y. PAN – « Splittings of metaplectic covers of some reductive dual pairs », *Pacific J. Math.* **199** (2001), p. 163–226.
- [15] P. PERRIN – « Représentations de Schrödinger, indice de Maslov et groupe métaplectique. », *Noncommutative harmonic analysis and Lie groups* (Marseille), Lectures Notes in Math., no. 880, Springer, Berlin-New York, 1980, p. 370–407.
- [16] D. PRASAD – « A brief survey on the Theta correspondence », *Number theory (Tiruchirapalli, 1996)* (Providence, RI) (K. Murty et M. Waldschmidt, éd.), Contemporary Maths, no. 210, Amer. Math. Soc., 1998, p. 171–193.
- [17] R. RAO – « On some explicit formulas in the theory of the Weil representation », *Pacific J. Math.* **157** (1993), p. 335–371.
- [18] R. STEINBERG – « Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques », *Colloque sur la Théorie des Groupes Algébriques (Bruxelles, 1962)* (C. B. de Recherches Mathématiques, éd.), Gauthier-Villars, 1962, p. 113–128.
- [19] L. STICKELBERGER – « Über eine neue eigenschaft der diskriminanten algebraischer zahlkörper », *Verh. 1 Internat. Math. Kongresses, Zurich 1897*, p. 182–193.
- [20] J.-L. WALDSPURGER – « Démonstration d’une conjecture de dualité de Howe dans les cas p -adique, $p \neq 2$ », *Festschrift in honor of I. I. Piatetski-Shapiro on the occasion of his sixtieth birthday, Part I (Ramat Aviv, 1989)* (Weizmann, Jerusalem), Israel Math. Conf. Proc., 2, 1990, p. 267–324.
- [21] A. WEIL – « Sur certains groupes d’opérateurs unitaires », *Acta. Math.* **111** (1964), p. 143–211.
- [22] — , « La cyclotomie jadis et naguère », *Enseignement Math.* **20** (1974), no. 2, p. 247–263.

- [23] T. YANG – « Eigenfunctions of the Weil representation of unitary groups of one variable », *Trans. Amer. Math. Soc.* **350** (1998), no. 6, p. 2393–2407.